

## CHAPITRE 8 LE SIGNAL RADAR

1	CARACTERISTIQUES GENERALES – NOTION DE SPECTRE .....	2
1.1	FORMULATION GENERALE DU SIGNAL RADAR .....	2
1.1.1	Expression générale du signal radar.....	2
1.1.2	Puissance et énergie d'un signal .....	2
1.2	SIGNAL VIDEO COMPLEXE.....	4
1.2.1	Définition.....	4
1.2.2	Génération du signal vidéo complexe .....	5
1.2.3	Notion de durée équivalente .....	5
2	APPROCHE PHYSIQUE DES SPECTRES .....	6
3	ETUDE QUALITATIVE D'UN SPECTRE SIMPLE .....	6
3.1	CONSTITUTION D'UN SIGNAL PERIODIQUE.....	6
3.2	SIGNAL PSEUDO CARRE.....	8
3.3	INVERSION DE PHASE DES COMPOSANTES ELEVEES .....	8
3.4	LIAISON ENTRE LA LARGEUR DE SPECTRE ET LA DUREE DU SIGNAL.....	8
3.5	CONCLUSIONS .....	9
4	NOTION MATHEMATIQUE DE SPECTRE TRANSFORMEE DE FOURIER.....	9
4.1	SPECTRE D'UN SIGNAL PERIODIQUE .....	9
4.2	EXTENSION DE LA NOTION DE SPECTRE .....	10
4.3	CORRESPONDANCE ENTRE LE SPECTRE GENERALISE ET LE SPECTRE PHYSIQUE.....	12
4.4	CAS DES SIGNAUX NON PERIODIQUES .....	13
5	SPECTRE DES SIGNAUX SOUS PORTEUSE .....	15
5.1	MODULATION D'AMPLITUDE .....	15
5.2	MODULATION AMPLITUDE-PHASE.....	16
6	NOTIONS DE FILTRAGE .....	16
6.1	DEFINITION DE LA TRANSMITANCE .....	16
6.2	PROPRIÉTÉS IMPORTANTES.....	17
7	RELATIONS PUISSANCES SPECTRES .....	18
7.1	PUISSANCE MOYENNE D'UN SIGNAL PERIODIQUE.....	18
7.2	ENERGIE DES SIGNAUX NON PERIODIQUES.....	19
7.3	PUISSANCE CRETE MAXIMALE D'UN SIGNAL.....	19
8	TRANSFORMEE DE FOURIER NUMERIQUE .....	21
8.1	PRINCIPE .....	21
8.2	TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE.....	23
9	CONCLUSION .....	23

## 1 CARACTERISTIQUES GENERALES – NOTION DE SPECTRE

Dans ce chapitre seront établies les principales propriétés du signal radar, utiles à la bonne compréhension des procédés mis en jeu dans le filtrage du signal, les radars de poursuite et la visualisation des cibles mobiles. Ces propriétés seront précisées et établies de manière plus rigoureuse au chapitre 16.

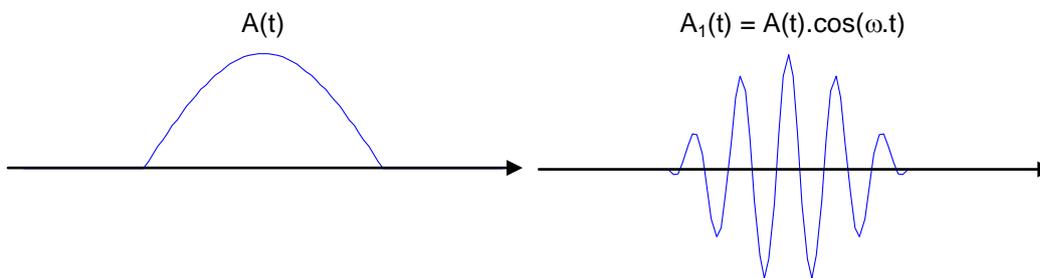
### 1.1 FORMULATION GENERALE DU SIGNAL RADAR

#### 1.1.1 Expression générale du signal radar

Le signal radar est généralement un signal sous porteuse à bande étroite modulé en amplitude et/ou en phase, qui peut être entièrement défini par la relation :

$$A_1(t) = A(t)\cos(\omega.t + \varphi(t))$$

La figure ci après illustre un exemple simple de tels signaux.



$A(t)$  et  $\varphi(t)$  contiennent,  $\omega$  étant connu, toute « l'information utile » du signal radar.

Une autre expression de ce signal est :

$$A_1(t) = X(t)\cos(\omega.t) + Y(t)\cos(\omega.t + \pi/2)$$

Avec :

$$X(t) = A(t).\cos(\varphi(t)) \text{ et } Y(t) = A(t).\sin(\varphi(t)).$$

#### 1.1.2 Puissance et énergie d'un signal

Les notions de puissance et d'énergie peuvent paraître familières, il semble cependant utile d'apporter les précisions suivantes :

##### a - Puissance instantanée d'un signal

Quelle que soit la nature du signal  $A(t)$ , la puissance instantanée **se définit** comme le carré de son amplitude :

$$P_i = A^2(t)$$

##### b - Énergie d'un signal

Par définition, l'énergie d'un signal est l'intégrale de sa puissance (quand elle existe) nous écrivons donc :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) dt$$

**c - Puissance efficace d'un signal**

Par définition, nous appellerons puissance efficace d'un signal :

- signal de durée finie :  $P = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2(t) dt$
- signal de durée infinie :  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2(t) dt$
- pour une tranche  $\Delta T$  d'un signal :  $P = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} A^2(t) dt$

C'est donc la valeur moyenne du carré de l'amplitude du signal :

$$P = \overline{A^2(t)}$$

Selon qu'elle est observée sur la totalité du signal ou sur la tranche où il est maximum, on parlera de puissance crête  $P_c$  ou puissance moyenne  $P_m$ .

Nous allons montrer qu'en fonction de l'amplitude crête du signal, cette définition unique (parfaitement cohérente avec celle adoptée pour le bruit au chapitre 6), peut apparemment prendre plusieurs formes.

**c.1 Signal sinusoïdal d'amplitude  $A_0$**

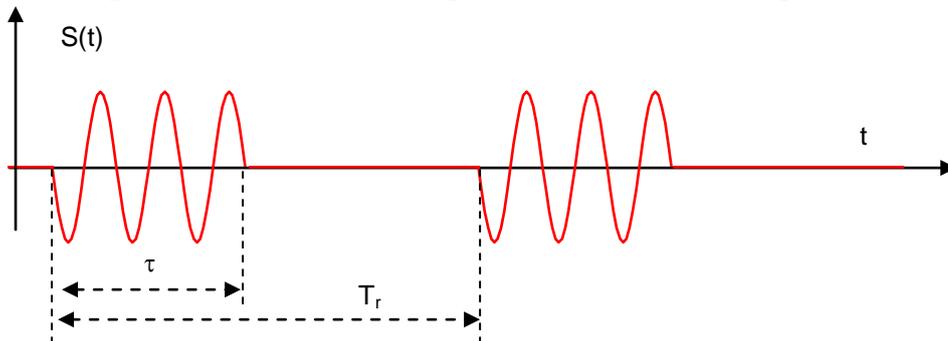
$$A_1(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$P_{i \max} = A_0^2$$

$$P_c = P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{A_0^2}{2}$$

On note que cette puissance efficace est égale à la moitié de la puissance instantanée maximale du signal  $A_1(t)$ .

**c.2 Train d'impulsions sinusoïdales (amplitude crête  $A_0$ , durée  $\tau$ , période  $T_r$ )**



Chaque impulsion a comme énergie :

$$E = \int_0^\tau A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{A_0^2 \tau}{2}$$

la **puissance crête** de ce signal est :

$$P_c = \frac{E}{\tau} = \frac{A_0^2}{2}$$

la **puissance moyenne** de ce signal est :

$$P_m = \frac{E}{T_r} = \frac{A_0^2 \tau}{2T_r} = P_c \frac{\tau}{T_r}$$

$$P_m = P_c \cdot \frac{\tau}{T_r}$$

«  $\tau/T_r$  » est le facteur de forme du train d'impulsions.

**c.3 Signal vidéofréquence d'amplitude  $A_0$**

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 dt = A_0^2$$

**c.4 Train d'impulsions vidéofréquence**

$$E = \int_0^\tau A_0^2 dt = A_0^2 \tau$$

$$P_c = A_0^2$$

$$P_m = \frac{A_0^2 \tau}{T_r} = P_c \frac{\tau}{T_r}$$

On remarque donc, pour des signaux de même amplitude et de même durée, deux expressions de l'énergie et donc des puissances (efficaces) crête et moyenne, selon que le signal soit ou non sur porteuse.

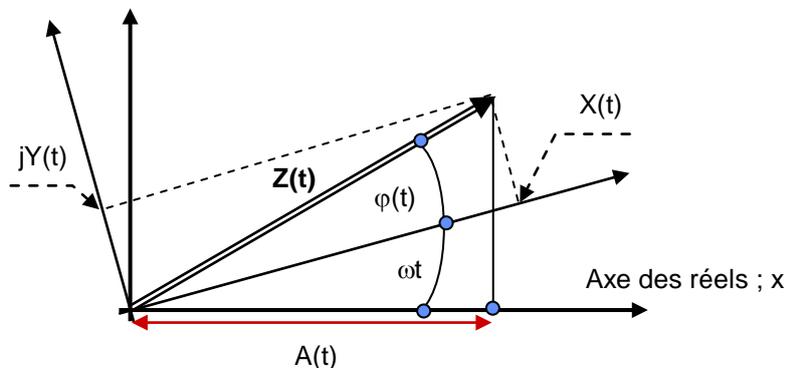
**1.2 SIGNAL VIDEO COMPLEXE**

**1.2.1 Définition**

Le signal radar est défini par la relation :

$$A_1(t) = A(t) \cos(\omega.t + \varphi(t)) = X(t) \cos(\omega.t) + Y(t) \cos(\omega.t + \pi/2)$$

La représentation de Fresnel d'un tel signal est la suivante



On y constate que :  $A_1(t)$  est la projection sur l'axe des réels, d'un vecteur  $Z(t)$  d'amplitude «  $A(t)$  » et de phase  $\omega.t + \varphi(t)$ .

$\omega$  étant connu, toute l'information contenue dans le signal  $A_1(t)$  se retrouve dans le signal complexe  $Z(t)$  :

$$Z(t) = A(t) e^{j\varphi(t)} = X(t) + jY(t)$$

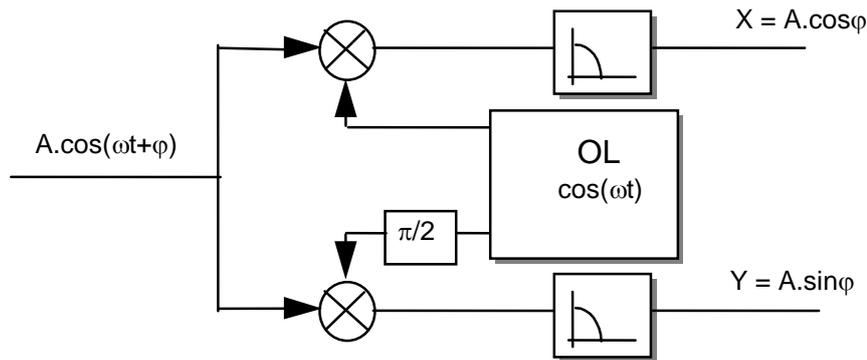
avec :

$$X(t) = A(t) \cos \varphi(t) \text{ et } Y(t) = A(t) \sin \varphi(t)$$

De même qu'au paragraphe 1.1.1 on pouvait dire que  $A(t)$  et  $\varphi(t)$  comportaient toute l'information utile du signal  $A_1(t)$ , pourra dans le cas général dire que  $Z(t)$  comporte toute l'information contenue dans le signal  $A_1(t)$  et ceci est vrai que  $\varphi(t)$  soit une fonction du temps ou une constante inconnue a priori, ce qui est pratiquement toujours le cas en radar.

### 1.2.2 Génération du signal vidéo complexe

Ce signal vidéo complexe s'obtient à partir du signal moyenne fréquence, selon le principe suivant dit de détection cohérente, basé sur une double démodulation du signal :



Cette double démodulation est couramment utilisée comme étage terminal, avant codage et traitement du signal, dans les récepteurs modernes.

*Car c'est le signal vidéo complexe qui est traité en numérique dans les récepteurs modernes.*

### 1.2.3 Notion de durée équivalente

Soit un signal de la forme :

$$A_2(t) = A(t) \text{Cos}(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

D'après le paragraphe « c », sa puissance crête peut s'écrire, au moment où  $A(t)$  passe par sa valeur maximale  $A_{\max}$

$$P_{c.\max} = \frac{1}{2} A_{\max}^2$$

et son énergie a pour expression :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) \text{Cos}^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) dt$$

On peut donc définir une durée équivalente  $\Delta T$  de ce signal (comme on l'a fait pour les bandes passantes au chapitre 6) telle que :

$$P_{c.\max} \Delta T = E$$

l'expression de  $\Delta T$  sera alors :

$$\Delta T = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) \cdot dt}{A_{\max}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \cdot dt}{P_{\max}}$$

## 2 APPROCHE PHYSIQUE DES SPECTRES

Un signal est en outre caractérisé par son évolution au cours du temps (fréquence, amplitude, phase...) et sa répartition dans le domaine des fréquences ou spectre.

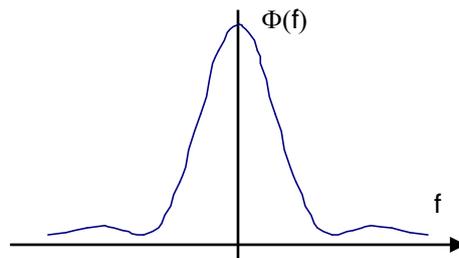
Nous verrons, plus loin, qu'il existe une correspondance bi-univoque entre le spectre d'un signal et son évolution au cours du temps. Auparavant, tentons de préciser **la notion physique de spectre**.

On désigne sous le nom de *spectre*, le domaine de fréquence occupé par un signal.

On peut donner une représentation graphique du spectre d'un signal dans un système d'axes où les abscisses sont graduées en fréquence.

Il existe deux sortes de spectres suivant la nature de l'ordonnée :

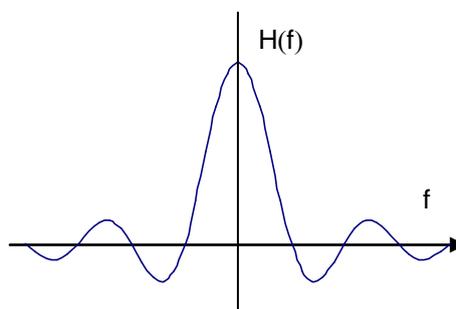
**Les spectres de puissance** dans lesquels l'ordonnée est proportionnelle à la puissance (crête ou moyenne) du signal à chaque fréquence.



Ils sont accessibles à la mesure par l'analyseur de spectre et servent à caractériser globalement un signal ; ils sont généralement utilisés pour étudier la répartition des signaux aléatoires (bruit) comme nous le verrons ultérieurement.

**Les spectres d'amplitude** où l'ordonnée est proportionnelle à l'amplitude du signal à chaque fréquence. Ce sont ces spectres qui seront étudiés ci après.

Nous verrons notamment que ces spectres d'amplitude peuvent prendre différentes formes et que la seule connaissance de la répartition de l'amplitude d'un signal en fonction de la fréquence ne suffit pas à caractériser entièrement un signal.



La phase des signaux portés par chaque fréquence a en effet une grande importance, c'est ce que nous allons établir au paragraphe suivant.

## 3 ETUDE QUALITATIVE D'UN SPECTRE SIMPLE

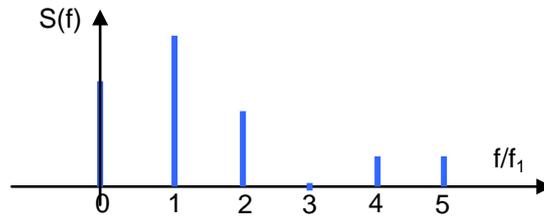
### 3.1 CONSTITUTION D'UN SIGNAL PERIODIQUE

Soit un signal composé de *cinq* signaux élémentaires :

## LE SIGNAL

- le premier  $s_0$  constant et d'amplitude 0,7 ;
- les autres sinusoïdaux de la forme  $\text{Cos}(2\pi ft + \varphi)$  :
  - $s_1$  de fréquence  $f_1$  et amplitude 1,
  - $s_2$  de fréquence  $2f_1$  et amplitude 0,5,
  - $s_4$  de fréquence  $4f_1$  et amplitude 0,2,
  - $s_5$  de fréquence  $5f_1$  et amplitude 0,2.

Le spectre d'un tel signal est un spectre de raies, chaque raie représentant l'amplitude de chaque signal élémentaire ou « *composante* » formant le signal complet.

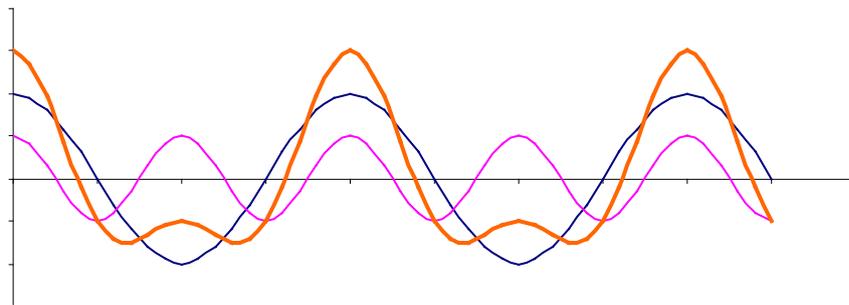


En fait, une indication manque pour reconstituer complètement le signal, c'est la manière de sommer les signaux élémentaires qui le composent, donc, à un instant donné, la phase relative de chacune d'elles.

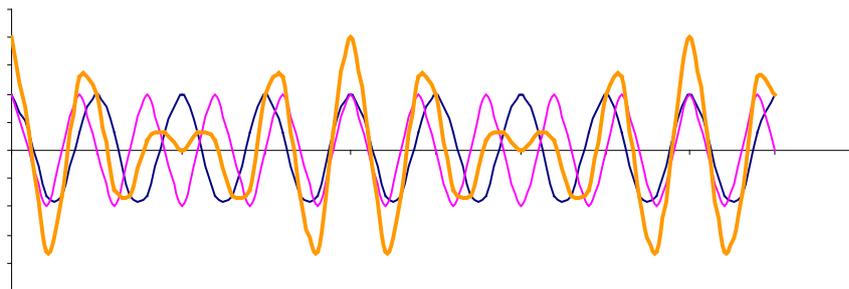
La forme du signal dépend de ces phases relatives ; pour mettre en évidence cette action dans la sommation des signaux élémentaires, considérons *les deux cas suivants* :

- signaux  $s_1$  et  $s_2$  : phase *zéro* à l'instant *zéro*
- signaux  $s_4$  et  $s_5$  : phase *zéro* ou  $\pi$  à l'instant *zéro*

Sommons d'abord les composantes  $s_1$  et  $s_2$  :



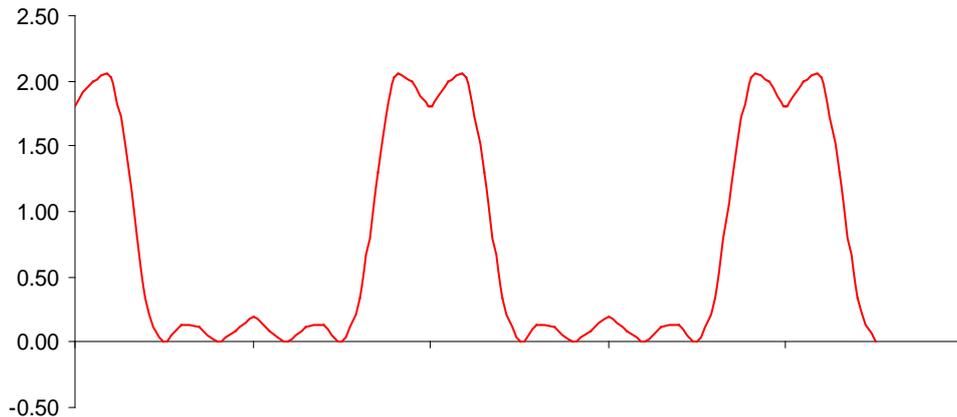
puis, les composantes  $s_4$  et  $s_5$  :



L'allure au cours du temps du signal composite variera suivant la manière de sommer ces différentes composantes.

### 3.2 SIGNAL PSEUDO CARRE

Cas 1 :  $0,7 + \Sigma_1 - \Sigma_2 = A_1(t)$



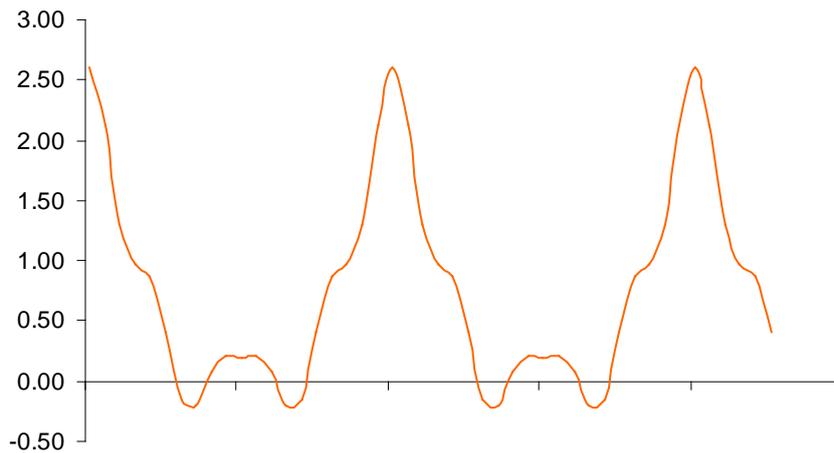
Les signaux obtenus sont très proches de signaux carrés et comme tels, aptes à être émis par un émetteur de grande puissance qui travaille généralement en régime saturé.

Remarquons que l'on peut les obtenir de deux manières :

- soit, si cela est possible, en émettant cette suite de signaux « *pseudo carrés* »,
- soit en émettant, indépendamment mais simultanément, les composantes de ce signal avec les phases convenables.

### 3.3 INVERSION DE PHASE DES COMPOSANTES ELEVEES

Cas 2 :  $0,7 + \Sigma_1 + \Sigma_2 = A_2(t)$



Les signaux obtenus ont une amplitude maximale plus élevée que dans le premier cas (2,6 contre 2,0), leur largeur à mi-puissance (*amplitude égale à 0,7 fois l'amplitude maximale*) est plus faible (1,5 unité de temps contre 3,5 unités de temps).

Pourtant, il n'est pas nécessaire d'émettre le *signal 2* pour obtenir ce résultat ; il suffit d'émettre le *signal 1*, ou ses composantes, puis de déphaser convenablement à la réception, les diverses raies du spectre.

### 3.4 LIAISON ENTRE LA LARGEUR DE SPECTRE ET LA DUREE DU SIGNAL

Par ailleurs, l'unité de temps choisie, pour représenter les divers signaux, n'est pas fixée.

Nous avons simplement adopté la *dixième* de la période du signal le plus lent.

La durée du signal composite est donc liée à cette période. Elle est en conséquence, inversement proportionnelle à la fréquence des signaux élémentaires.

*Par exemple :*

- si  $f_1 = 1$  Hz, la durée du signal  $A_1(t)$  est de 0,35 secondes, et l'étalement de son spectre de 5 Hz,
- si  $f_1 = 10$  Hz, la durée du signal  $A_1(t)$  est de 0,035 secondes, et l'étalement de son spectre de 50 Hz.

Nous pouvons généraliser en disant que la durée du signal composite dans certaines configurations de phases est *inversement proportionnelle* à la longueur du spectre émis.

### 3.5 CONCLUSIONS

De cet exemple très simple, nous allons tenter de dégager quelques propriétés générales des spectres qui sont :

1. Pour caractériser complètement un signal, son *spectre doit être défini en amplitude et en phase*.
2. On peut jouer sur la phase des composantes d'un signal pour modifier sa répartition dans le temps. Ce procédé est utilisé aussi bien à l'émission qu'à la réception du signal dans certains radars modernes.
3. La possibilité de pouvoir, dans ces conditions, *créer un signal court, réside uniquement dans la largeur de spectre du signal traité*.
4. En particulier, il revient au même d'émettre un signal quelconque de spectre très large qu'un signal très bref, à condition de disposer à la réception des éléments permettant la « *remise en phase* » des composantes du signal.

## 4 NOTION MATHÉMATIQUE DE SPECTRE TRANSFORMÉE DE FOURIER

Le paragraphe précédent nous a permis de dégager quelques propriétés de la liaison spectre évolution temporelle d'un signal ; nous allons maintenant les préciser.

### 4.1 SPECTRE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Tout signal périodique  $A(t)$  peut se décomposer en une série de sinusoides élémentaires. Si  $T$  est la période du signal, la série représentant  $A(t)$  prend la forme :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(2\pi \cdot n f_T \cdot t) + b_n \sin(2\pi \cdot n f_T \cdot t)$$

expression dans laquelle :  $f_T = 1/T$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta=T} A(t) \cdot \cos(2\pi \cdot n f_T \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta=T} A(t) \cdot \sin(2\pi \cdot n f_T \cdot t) dt$$

Cette série, qui constitue la meilleure approximation de  $A(t)$ , est connue sous le nom de **série de Fourier**.

Nous ne démontrerons pas les conditions de convergence de la série de Fourier. On peut, par ailleurs vérifier que, si elle existe, les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont bien définis par les intégrales précédentes.

Il en résulte que cette décomposition est unique et qu'à une valeur donnée du signal  $A(t)$  correspondent des valeurs bien déterminées des  $a_n$  et  $b_n$  qui sont les résultats des intégrales ci-dessus.

En outre, on démontre que :

$$a_n \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega \cdot t) = C_n \cos(n \cdot \omega \cdot t + \varphi_n)$$

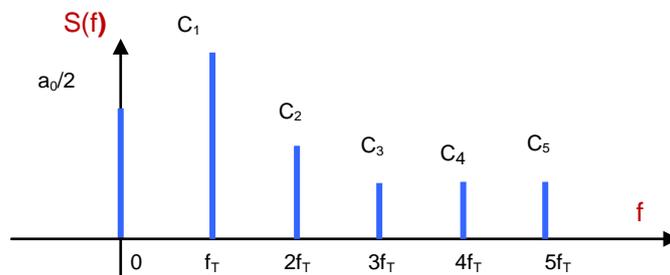
expression où :

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

Chaque signal périodique  $A(t)$  est donc la somme d'un ensemble de sinusoïdes d'amplitudes et de phases bien déterminées ; dès lors que l'on sait calculer les  $a_n$  et  $b_n$ , et que ce calcul donne des résultats bien définis. En pratique, ces conditions sont réunies dans la majorité des cas.

On peut alors représenter ce signal dans le domaine des fréquences par un **spectre de raies**

Dans ce spectre  $S(f)$  chaque raie a pour *abscisse* la fréquence d'une des sinusoïdes composant le signal :  $nf_T$ , et pour *hauteur*, l'amplitude crête de cette sinusoïde :  $C_n$ .



Remarquons que :

- les fréquences des raies étant des multiples de  $f_T = 1/T$ , l'espacement de deux raies consécutives du spectre est :  $1/T$  : inverse de la période du signal  $A(t)$
- pour caractériser complètement le signal, il faut en outre, connaître la phase  $\varphi_n$  de chaque raie.

L'analyse d'un tel signal, à l'aide d'un analyseur de spectre, présente les amplitudes des raies ou composantes du signal. **Le spectre ainsi défini a donc une existence physique.**

## 4.2 EXTENSION DE LA NOTION DE SPECTRE

La décomposition précédente, si elle amène directement à la notion physique de spectre, n'est pas facilement accessible au calcul. Pour cette raison, on préfère la remplacer par une forme plus générale qui se déduit de la précédente de la manière suivante.

Posons :

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \lambda_n \cdot e^{jn \cdot \omega t} + \lambda_{-n} \cdot e^{-jn \cdot \omega t}$$

Ce qui revient à écrire chaque composante du signal sous la forme exponentielle avec :

$$\lambda_n = \frac{a_n - j \cdot b_n}{2}$$

$$\lambda_{-n} = \frac{a_n + j \cdot b_n}{2}$$

$$\lambda_0 = \frac{a_0}{2}$$

Avec ces notations, le développement en série de *Fourier* d'un signal périodique s'écrira :

$$A(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \cdot e^{jn \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{T} \int_{\Delta=T} A(t) \cdot e^{-jn \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t} \cdot dt$$

L'expression de la série de *Fourier* et celle des coefficients de cette série sont ainsi uniformes.

Cette forme de décomposition fait par contre apparaître des « **fréquences négatives** ».

Ces « *fréquences négatives* » n'ont pas de réalité physique, elles proviennent de la décomposition en exponentielles des lignes trigonométriques.

La répartition des  $\lambda_n$  dans le domaine des fréquences, en attachant à chaque  $\lambda_n$  la fréquence  $nf_T$ , constitue le spectre généralisé du signal périodique  $A(t)$ .

Il peut être utile de désigner le spectre d'un signal périodique sous la forme d'une fonction de la fréquence. Considérons donc une fonction  $H_T(f)$  dont les propriétés sont les suivantes :

- $H_T(f)$  est une fonction discontinue de la fréquence  $f$
- $H_T(f) = \lambda_n$  si  $f = nf_T$
- $H_T(f) = 0$  si  $f \neq nf_T$

La fonction  $H_T(f)$  englobe toutes les  $\lambda_n$  sans prendre d'autres valeurs quel que soit  $f$ . Elle caractérise donc entièrement et exactement le spectre d'un signal périodique.

On pourra donc écrire que :

**Le spectre généralisé d'un signal périodique** est entièrement défini par une fonction  $H_T(f)$  telle que :

$$H_T(f) = \lambda_n \quad \text{pour } f = nf_T$$

$$H_T(f) = 0 \quad \text{pour } f \neq nf_T$$

$n$  nombre entier compris entre  $-\infty$  et  $+\infty$

Nous remarquerons que :

$$\lambda_{-n} = \lambda_n^*$$

Soit :

$$H_T(-f) = H_T^*(f)$$

et noterons que :

$$|\lambda_n| = \rho_n = |H_T(f)|, \text{ pour } f = nf_T$$

$$\text{Arg}(\lambda_n) = \varphi_n = \text{Arg}(H_T(f)), \text{ pour } f = nf_T$$

### 4.3 CORRESPONDANCE ENTRE LE SPECTRE GENERALISE ET LE SPECTRE PHYSIQUE

En pratique, les  $\lambda_n$  ne peuvent prendre que des valeurs particulières car les  $a_n$  et  $b_n$  sont toujours réels.

On aura donc :

$$\lambda_n = \frac{a_n - j \cdot b_n}{2} = \rho_n \cdot e^{j\varphi_n}$$

$$\lambda_{-n} = \frac{a_n + j \cdot b_n}{2} = \rho_{-n} \cdot e^{-j\varphi_n}$$

avec :

$$\operatorname{tg}\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

$$\rho_n = \rho_{-n} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Nous savons également que :

$$\lambda_{-n} = \lambda_n^*$$

d'où :

$$|\lambda_n| = \rho_n = \sqrt{\lambda_n \cdot \lambda_{-n}}$$

Reportons-nous aux expressions du paragraphe 3 qui ont servi à définir le spectre physique du signal :

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{-b_n}{a_n}$$

On en déduit que le signal réel correspondant à la décomposition précédente a :

- pour module :  $2|\lambda_n| = 2\sqrt{\lambda_n \cdot \lambda_{-n}}$
- et pour phase :  $\varphi_n$

Soit en résumé :  $n > 0$

$$C_n = 2|\lambda_n| = 2|H_T(nf_T)|$$

$$\varphi_n = \operatorname{Arg}(\lambda_n) = \operatorname{Arg}(H_T(nf_T))$$

**NOTA :**

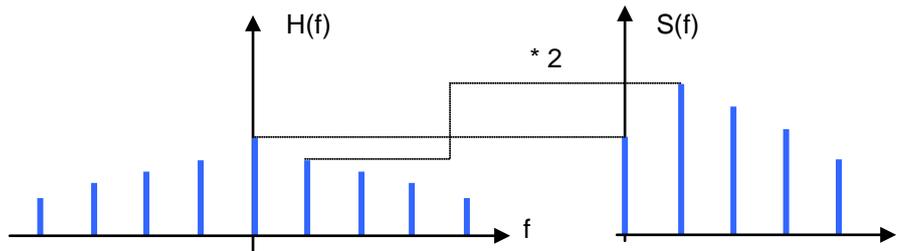
La symétrie  $\lambda_{-n} = \lambda_n^*$  permet de reconstituer le spectre du signal en se reportant uniquement aux valeurs positives de  $n$ .

On notera, en outre, que la composante continue du signal constitue un cas particulier, car :

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{\Delta=T} A(t) dt = \lambda_0$$

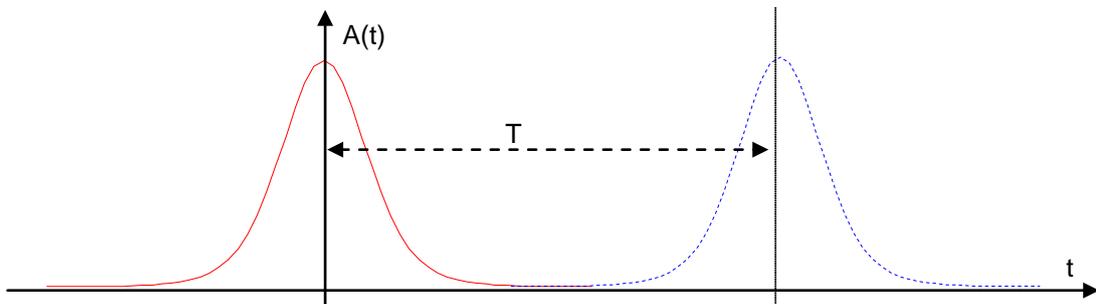
On peut donc déduire de  $H_T(f)$  : **spectre généralisé du signal, le spectre réel correspondant  $S_T(f)$ .**

La figure suivante donne une illustration de cette correspondance :



#### 4.4 CAS DES SIGNAUX NON PERIODIQUES

Un signal non périodique peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la période tend vers l'infini, si ce signal périodique est la répétition, tous les intervalles T, d'un signal élémentaire dont l'allure au cours du temps ne varie pas avec T.



Le signal périodique admet une décomposition en *série de Fourier*, qui répond aux relations :

$$A(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_T(nf_T) \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot f_T \cdot t}$$

$$H_T(nf_T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot n \cdot f_T \cdot t} \cdot dt$$

$$f_T = \frac{1}{T}$$

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ ,  $f_T \rightarrow 0$ . Les raies du spectre  $H_T(nf_T)$  se rapprochent indéfiniment les unes des autres.

Par ailleurs, l'existence de la transformée de Fourier du signal  $A(t)$  impose la relation :

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A(t) dt = K \quad \text{constante finie}$$

Il en résulte que, lorsque T tend vers l'infini, tous les  $H_T(nf_T)$  tendent vers zéro. On ne peut donc plus parler de raies, ou composantes du signal, à une fréquence bien définie  $nf_T$ . Par contre, on pourra être amené à examiner ce qui se passe dans un domaine  $\delta f$  autour d'une fréquence f. cela amène à poser :

$$f = n \cdot f_T$$

$$\delta f = f_T = 1/T$$

$$H_T(nf_T) = H_T(f)$$

Dans un domaine d'observation  $\delta f$ , on ne trouve qu'une seule raie du spectre du signal.

Par ailleurs, lorsque  $T \rightarrow \infty$ ,  $H_T(f) \rightarrow 0$ , mais  $T H_T(f)$ , reste fini. Cela amène à poser :

$$H(f) = T \cdot H_T(f)$$

$$H_T(f) = H(f) \cdot \delta f$$

$$A(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot \delta f$$

$$H(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} A(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

A la limite, la série  $A(t)$  devient une intégrale et nous pouvons écrire :

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

Nous interpréterons ce résultat de la manière suivante :

**À un signal non périodique correspond un spectre continu  $H(f)$ .** Ce spectre n'a pas tout à fait la même signification que le spectre  $H_T(f)$  du signal périodique. En effet :

- $|H_T(f)|$  représente l'amplitude de chaque raie d'un signal périodique ;
- $|H(f)|$  représente la densité d'amplitude du signal non périodique dans le domaine des fréquences, car d'après ce qui précède, c'est  $|H(f)| \delta f$  qui est une amplitude ou du moins, qui en a la dimension.

Nous continuerons à employer le terme de composante du spectre d'un signal à la fréquence  $f$  ou amplitude du signal « porté » par la fréquence  $f$ , en attribuant à cette fréquence, le domaine  $\delta f$  qui l'entoure.

La connaissance de  $H(f)$  (qui est, rappelons-le, une variable complexe possédant une amplitude et une phase), permet de retrouver la répartition du signal au cours du temps, et toute action sur  $H(f)$  permet de modifier cette répartition temporelle.

$H(f)$  possède, comme  $H_T(f)$ , les propriétés suivantes :

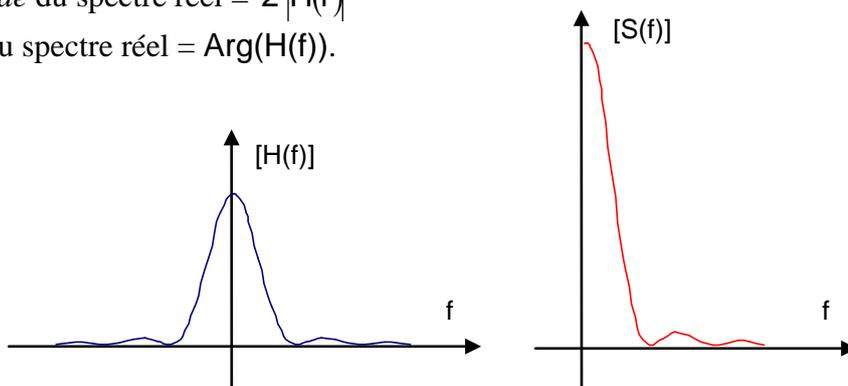
$$H(-f) = H^*(f)$$

$$|H(f)|^2 = H(f) \cdot H(-f)$$

Les relations entre le spectre  $H(f)$  et le spectre réel du signal correspondant restent également les mêmes, la discontinuité à la fréquence zéro disparaissant dans ce cas où il n'existe plus d'amplitude de signal à la seule fréquence zéro. Nous l'illustrerons par la figure suivante :

$$\text{Amplitude du spectre réel} = 2 |H(f)|$$

$$\text{Phase du spectre réel} = \text{Arg}(H(f)).$$



## 5 SPECTRE DES SIGNAUX SOUS PORTEUSE

### 5.1 MODULATION D'AMPLITUDE

Soit un signal  $A(t)$  et un signal porteur  $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Un signal d'enveloppe  $A(t)$  et de fréquence  $\omega_0$ , ou signal  $A_1(t)$  avec porteuse s'écrira :

$$A_1(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

expression dans laquelle  $\varphi$  représente la phase de la porteuse à l'instant zéro. La transformée de *Fourier* de  $A_1(t)$  sera alors :

$$\begin{aligned} H_1(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-2\pi \cdot j \cdot (f-f_0)t} \cdot dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-2\pi \cdot j \cdot (f+f_0)t} \cdot dt \end{aligned}$$

Soit, comme :  $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$

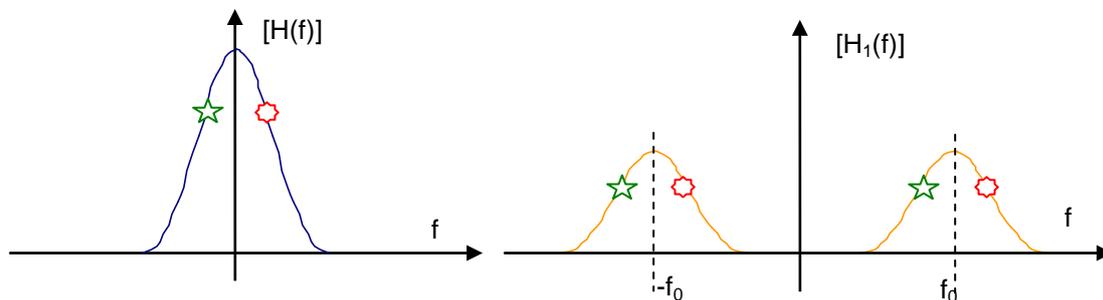
$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left( e^{j\varphi} \cdot H(f - f_0) + e^{-j\varphi} \cdot H(f + f_0) \right)$$

Cette expression reste valable pour un signal périodique à condition de remplacer  $H(f)$  par  $H_T(f)$ . Dans ce cas particulier, il faut, en outre, que  $f_0$  soit un multiple de  $f_T$ , sans quoi, le signal ne serait plus périodique.

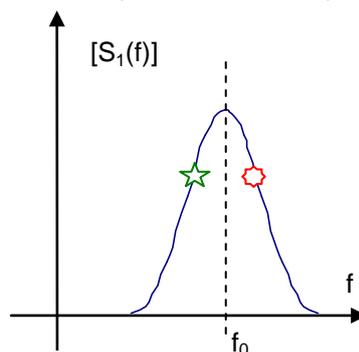
Si on choisit  $\varphi = 0$  on arrive à la forme simplifiée suivante :

$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left( H(f - f_0) + H(f + f_0) \right)$$

Cette relation correspond à la transformation suivante :



Introduction de la porteuse dans le plan de Fourier



Module du spectre réel avec porteuse

On remarquera que dans les cas pratiques où les spectres des signaux avec porteuse restent disjoints, le module du spectre réel avec porteuse est la translation de  $H(f)$ , sans porteuse d'une valeur  $f_0$  sur l'axe des fréquences. Cette propriété purement graphique ne doit pas faire oublier qu'il s'agit de variables de natures différentes.

## 5.2 MODULATION AMPLITUDE-PHASE

Soit un signal modulé simultanément en amplitude et en phase

$$A_1(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

pour nous ramener au cas déjà étudié en 5.1 on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A(t) \cos \varphi(t) \cos 2\pi f_0 t - A(t) \sin \varphi(t) \sin 2\pi f_0 t \\ &= A(t) \cos \varphi(t) \cos 2\pi f_0 t + A(t) \sin \varphi(t) \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) \end{aligned}$$

$A_1(t)$  est donc la somme de deux signaux modulés en amplitude, le premier de porteuse  $f_0$  et de phase nulle, le second de porteuse  $f_0$  et de phase  $\pi/2$ , donc d'après les résultats du paragraphe 5.1, on aboutit aux relations suivantes :

$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left[ H_x(f - f_0) + H_x(f + f_0) \right] + \frac{1}{2} \left[ H_y(f - f_0) e^{j\pi/2} + H_y(f + f_0) e^{-j\pi/2} \right]$$

expression dans laquelle

$H_x$  est le spectre de  $X(t) = A(t) \cos \varphi(t)$

$H_y$  est le spectre de  $Y(t) = A(t) \sin \varphi(t)$

Soit en posant  $e^{j\pi/2} = j$  :

$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left[ H_x(f - f_0) + jH_y(f - f_0) + H_x(f + f_0) - jH_y(f + f_0) \right]$$

Le spectre du signal  $A_1(t)$  est donc complètement connu dès lors que l'on connaît le spectre.

$$H(f) = H_x(f) + jH_y(f)$$

qui est le spectre du signal vidéo complexe :

$$Z(t) = A(t) \cos \varphi(t) + jA(t) \sin \varphi(t)$$

Ces notions seront précisées au chapitre 16.

## 6 NOTIONS DE FILTRAGE

### 6.1 DEFINITION DE LA TRANSMITTANCE

Un filtre vient modifier l'amplitude et la phase des signaux qui le traversent, et ceci, d'une manière ne dépendant que de la fréquence du signal qui traverse le filtre, si le filtrage est linéaire. On caractérisera un filtre par sa **transmittance**, que nous allons définir de la manière suivante :

Soit à l'entrée du filtre un signal de la forme :

$$e = \cos 2\pi ft$$

après passage dans le filtre, le signal sera atténué et déphasé et nous nous trouverons en présence d'un signal :

$$s = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$$

**$\alpha$  et  $\varphi$  caractérisent entièrement la transmittance du filtre.**

Le filtre est dit linéaire si  $\alpha$  et  $\varphi$  ne dépendent que de  $\omega$  et non de l'amplitude du signal qui lui est appliqué.

Pour aboutir à l'expression mathématique de la transmittance, décomposons l'entrée et la sortie en série de Fourier :

$$e = 1/2 \cdot \left( e^{j2\pi ft} + e^{-j2\pi ft} \right)$$

$$s = \alpha/2 \cdot \left( e^{(j2\pi ft + \varphi)} + e^{-(j2\pi ft + \varphi)} \right)$$

Pour chaque fréquence (*positive* ou *négative*), nous voyons que le passage de « e » à « s » se fait par multiplication :

par :  $\alpha e^{j\varphi}$  de la composante de fréquence f

par :  $\alpha e^{-j\varphi}$  de la composante de fréquence -f

Nous pouvons donc définir la transmittance d'un filtre par un nombre complexe tel que :

$F(f) = \alpha e^{j\varphi} \Rightarrow f > 0$ $F(-f) = F^*(f)$
---

Dans ce cas, le filtrage par un filtre linéaire est défini par les relations

<i>pour un signal non périodique :</i>		$H_{\text{filtré}}(f) = H(f) \cdot F(f)$
<i>pour un signal périodique :</i>		$H_{T_{\text{filtré}}}(f) = H_T(f) \cdot F(f)$

## 6.2 PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

On peut rattacher la transmittance d'un filtre à sa fonction de transfert ; en effet si  $H(p)$  est la fonction de transfert d'un système, sa réponse à une entrée harmonique se caractérise par un rapport d'amplitudes *entrée sortie* :

$$\alpha = |H(j\omega)|$$

et un déphasage :

$$\varphi = \text{Arg}(H(j\omega))$$

La relation entre la transmittance et la fonction de transfert d'un filtre est donc :

$$F(f) = H(2j\pi f)$$

La transmittance d'un filtre est l'expression mathématique de l'atténuation et du déphasage qu'il apporte aux composantes du signal qui le traversent.

L'expression de la transmittance d'un filtre ne doit tenir compte que de ces deux effets.

**En particulier, il revient au même de multiplier par un nombre complexe  $F(f)$  la composante à la fréquence  $f$  d'un signal sans porteuse, ou de multiplier par le même nombre complexe les composantes de fréquences  $f - f_0$  et  $f + f_0$  du signal avec porteuse correspondant.**

Si  $F(f)$  est l'expression de la transmittance d'un filtre vidéo, la fonction de filtrage sous porteuse équivalente sera donc définie par :

$$H_1(f) F_1(f) = \frac{1}{2} [H(f - f_0) F(f - f_0) + H(f + f_0) F(f + f_0)]$$

Ce qui revient à écrire **dans les cas pratiques où les spectres et les transmittances sont disjoints** :

$$F_1(f) = F(f - f_0) + F(f + f_0)$$

relation à rapprocher de la correspondance spectre vidéo-spectre signal avec porteuse dont elle diffère par l'absence du coefficient : 1/2.

## 7 RELATIONS PUISSANCES SPECTRES

### 7.1 PUISSANCE MOYENNE D'UN SIGNAL PERIODIQUE

La puissance moyenne d'un signal  $A(t)$  s'écrit :

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{\Delta=T} A^2(t) dt$$

Dans le cas d'un signal périodique,  $A(t)$  se décompose en série de *Fourier* :

$$A(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \cdot e^{jn \cdot 2\pi \cdot f_T t}$$

d'où :

$$A^2(t) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \lambda_p \cdot \lambda_q \cdot e^{j \cdot (p+q) \cdot 2\pi \cdot f_T t}$$

comme :  $f_T = \frac{1}{T}$  toutes les intégrales de la forme :

$$\int_{\Delta=T} e^{j\pi \cdot (p+q) \frac{t}{T}} \cdot dt$$

sont nulles si :  $p \neq -q$  et égales à  $T$  si :  $p = -q = n$ .

Ce qui permet d'écrire :

$$P_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \cdot \lambda_{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_T(f) H_T(-f)$$

$$P_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} |H_T(f)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_n|^2$$

On peut retrouver cette relation à partir de la notion physique de spectre ; en effet,  $A(t)$  peut s'écrire :

$$A(t) = C_0 + \sum_1^{\infty} C_n \cdot \text{Cos}(2\pi n f_T t)$$

Il est intuitif de penser que la puissance moyenne du signal  $A(t)$  sera égale à la somme des puissances portées par chacune de ses composantes, d'où :

$$P_m = C_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{C_n^2}{2}$$

Or :

$$C_0 = \lambda_0$$

$$C_n = 2\sqrt{\lambda_n \lambda_{-n}}$$

d'où :

$$P_m = \lambda_0^2 + 2 \sum_1^{\infty} \lambda_n \lambda_{-n}$$

soit :

$$P_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \lambda_{-n}$$

## 7.2 ENERGIE DES SIGNAUX NON PERIODIQUES

Nous avons vu qu'un signal non périodique peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la période  $T \rightarrow \infty$ . Sa puissance moyenne tend vers zéro, mais son énergie  $E = T P_m$  est un nombre fini non nul.

On peut écrire sur la durée de la période du signal :

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} |H_T(f)|^2 \times T$$

et nous pouvons poser comme au paragraphe 6 :

$$H(f) = T H_T(f) \Rightarrow T = 1/\delta f$$

d'où :

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} |H_T(f)|^2 \frac{T^2}{T} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \delta f$$

donc, à la limite, lorsque  $T \rightarrow \infty$  et  $\delta f \rightarrow 0$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \cdot df$$

Nous savons, en outre, que  $|H(f)|$  est une fonction symétrique en  $f$ , ce qui permet d'écrire :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

## 7.3 PUISSANCE CRETE MAXIMALE D'UN SIGNAL

Un signal atteint sa puissance maximale lorsqu'il atteint son amplitude maximale. Dans le cas général, cette amplitude maximale dépend de la phase relative des diverses composantes du spectre du signal.

Par contre, il existe un cas limite où toutes ces composantes sont en phase qui peut s'obtenir par exemple, sur un signal donné, par un filtrage adéquat compensant les écarts de phase entre les composantes du signal et répondant à la relation :

$$|F(f)| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg}(F(f)) = -\text{Arg}(H(f)).$$

Dans ce cas, toutes les phases des composantes du signal sont nulles à l'instant  $t = 0$  et on peut écrire à l'instant zéro :

**a - dans le cas d'un signal périodique :**

$$A_{\max} = \sum_0^{\infty} C_n = \lambda_0 + 2 \sum_0^{\infty} |\lambda_n|$$

$$A_{\max} = \sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_n| = \sum_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|$$

**b - dans le cas d'un signal non périodique :**

$$H_T(f) = H(f) \delta f$$

et donc, à la limite :

$$A_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df = 2 \int_0^{\infty} |H(f)| df$$

$A_{\max}$  représente l'amplitude maximale que peut prendre un signal convenablement filtré. Les relations précédentes s'appliquent aussi bien sur les signaux avec porteuse que sans porteuse.

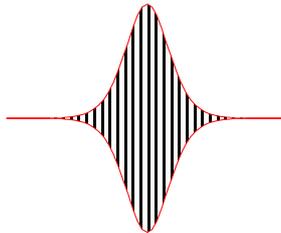
On remarquera également que le signal qui peut toujours se mettre sous la forme :

$$A(t) = C_0 + \sum_1^{\infty} C_n \cos 2\pi nft$$

est symétrique par rapport au temps  $t = 0$ .

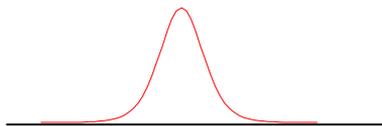
Par ailleurs, l'expression de la puissance crête du signal prendra (Cf § 1.1.2) une forme différente selon qu'il sera ou non sous porteuse :

**c - dans le cas d'un signal avec porteuse :**



$$P_{c \max} = \frac{A_{\max}^2}{2}$$

**d - dans le cas du signal sans porteuse :**



$$P_{c \max} = A_{\max}^2$$

D'où les diverses expressions de la puissance crête maximale d'un signal,  $P_{c \max}$  :

SIGNAL	Avec porteuse	Sans porteuse
Non périodique	$\frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty}  H(f)  df \right]^2 = 2 \left[ \int_0^{\infty}  H(f)  df \right]^2$	$\left[ \int_{-\infty}^{\infty}  H(f)  df \right]^2 = 4 \left[ \int_0^{\infty}  H(f)  df \right]^2$
périodique	$\frac{1}{2} \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty}  \lambda_n  \right]^2 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty}  H_T(f)  \right]^2$	$\left[ \sum_{-\infty}^{+\infty}  \lambda_n  \right]^2 = \left[ \sum_{-\infty}^{+\infty}  H_T(f)  \right]^2$

**NOTA** : On aurait pu directement écrire, dans le cas du signal non périodique :

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_T(f) \cdot e^{j2\pi \cdot ft} df$$

soit :

$$A(t) = \int_{-\infty}^0 H(f) \cdot e^{j2\pi \cdot ft} df + \int_0^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi \cdot ft} df$$

et, en changeant  $f$  en  $-f$ , dans la première expression :

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^{+\infty} H^*(f) \cdot e^{-j2\pi \cdot ft} df + \int_0^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi \cdot ft} df \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \text{R}_{\text{éel}} [H(f) \cdot e^{j2\pi \cdot ft}] \cdot df \end{aligned}$$

Le maximum de  $A(t)$  est obtenu lorsque  $H(f) e^{j2\pi \cdot ft}$  est, à l'instant zéro, réel quel que soit  $f$ , d'où :

$$A_{\text{max}} = 2 \cdot \int_0^{\infty} |H(f)| df$$

On retrouve ainsi la proposition précédente.

## 8 TRANSFORMEE DE FOURIER NUMERIQUE

### 8.1 PRINCIPE

La transformée de Fourier numérique, est l'opération qui permet de calculer le spectre d'un signal complexe. Elle consiste, après obtention du signal vidéo complexe à prélever un nombre limite «  $N$  » d'échantillons du signal et à approcher au mieux l'expression :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot ft} dt$$

prise sur la durée réelle  $T$  du signal.

Pour cela on découpe le domaine d'intégration en un nombre  $N$  d'intervalles de durée :  $\theta = T/N$  (correspondants aux échantillons pris sur le signal) et on écrit en posant :

$$\begin{aligned} t &= p\theta \text{ et } : dt = \theta \\ H(f) &\cong \sum_{p=0}^{p=N-1} Z(p\theta) e^{-j2\pi \cdot fp\theta} \cdot \theta \end{aligned}$$

Cette expression peut se simplifier si on se contente d'un nombre réduit d'échantillons de spectre pris tous les  $\delta F = 1/T$ , en posant dans ce cas  $f = k/T$  :

$$\begin{aligned} j2\pi \cdot fp\theta &= j2\pi \cdot \frac{k}{T} \cdot p \cdot \frac{T}{N} = \frac{j2\pi}{N} \cdot k \cdot p \\ H\left(\frac{k}{T}\right) &\cong \frac{T}{N} \sum_{p=0}^{N-1} Z(p \cdot \theta) \exp\left\{\frac{j2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right\} \end{aligned}$$

Posons :

$$Z(p\theta) = Z_p \quad \text{et} \quad \frac{N}{T} \cdot H\left(\frac{k}{T}\right) = H_k$$

pour arriver à l'expression :

$$H_k = \sum_{p=0}^{N-1} Z_p \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right\}$$

$H_k$  qui est bien à un coefficient près une approximation de  $H(f)$  est dite **Transformée de Fourier Discrète** (TFD) de  $Z(t)$ .

On remarquera en outre que  $H_k$  ne comporte que **N échantillons indépendants**, en effet :

$$\begin{aligned} H_{k+N} &= \sum_{p=0}^{N-1} Z_p \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} \cdot (k+N) \cdot p\right\} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} e^{-j2\pi} \cdot Z_p \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right\} \end{aligned}$$

soit comme  $e^{-j2\pi} = 1$

$$H_{k+N} = H_k$$

La fonction

$$\frac{N}{T} \cdot H\left(\frac{k}{T}\right) = H_k$$

est donc une **fonction périodique** de période fréquentielle.

$$f_T = \frac{N}{T} = \frac{1}{\theta}$$

Le choix du nombre  $N$  d'échantillons pris sur le signal conditionnera donc le domaine de spectre du signal  $Z(t)$  observable sans ambiguïté. En particulier si  $\Delta F$  est la **bande totale du signal observé  $Z(t)$** , il faudra choisir :

$$\theta = \frac{N}{T} \leq \frac{1}{\Delta F}$$

ou :

$$N \geq T \Delta F$$

Inversement, on peut vérifier que la TFD admet une transformée inverse d'expression :

$$Z_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k \exp\left\{\frac{j2\pi}{N} \cdot k \cdot p\right\}$$

en effet, en remplaçant  $H_k$  par sa valeur il vient :

$$Z_p = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} Z_i \exp\left\{\frac{j2\pi}{N} (p-i)k\right\}$$

si :  $i \neq p$

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_i \exp \left\{ \frac{j2\pi}{N} (p-i)k \right\} = 0$$

si :  $i = p$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} Z_p \exp \{0\} = Z_p$$

Le calcul d'un échantillon  $H_k$  nécessite d'effectuer la somme de  $N$  produits complexes. Un produit complexe nécessitant quatre multiplications algébriques le **volume de calcul total** pour les «  $n$  » échantillons de  $H_k$  sera :

$4 N^2$  multiplications et  $4 N^2$  additions.

## 8.2 TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE

Dans le cas où  $N = 2^n$ , un algorithme de calcul (voir annexe) partant des  $N$  valeurs de  $Z_p$  arrive aux  $N$  valeurs de  $H_k$  par  $N$  associations successives de  $N$  variables intermédiaires prises deux à deux de la forme :

$$\begin{aligned} A_i \text{ (--0--)} &= A_{j-1} \text{ (--0--)} + W^q A_{i-1} \text{ (--1--)} \\ A_i \text{ (--1--)} &= A_{j-1} \text{ (--0--)} - W^q A_{i-1} \text{ (--1--)} \end{aligned}$$

La double opération précédente est connue sous le nom de papillon FFT et comporte une multiplication complexe et deux additions complexes soit quatre multiplications et huit additions.

Il faut  $N/2$  papillons pour passer des  $N A_{j-1}$  aux  $N A_j$ , et  $n$  itérations pour arriver aux  $N$  valeurs finales des  $H_k$  soit  $n N/2$  papillons qui correspondent à :

$2 n N$  multiplications et  $3 n N$  additions

le gain par rapport au calcul direct croit rapidement avec  $N$ . Par exemple pour  $N = 256$  ( $n = 8$ ) on aboutit à 4096 multiplications contre 262 144.

## 9 CONCLUSION

*Le présent chapitre présente les principales propriétés des spectres d'amplitudes et de la correspondance spectre-signal. En particulier, l'introduction de la porteuse sur le signal introduit sur son spectre une transformation caractéristique à bien retenir.*

*L'action des filtres linéaires et le mode de calcul des puissances à partir de la connaissance du spectre du signal sont également des notions fondamentales dans l'examen des modes de réception du signal radar.*

*Il nous reste maintenant à examiner l'action du récepteur sur le mélange signal bruit, ce qui va être commencé au chapitre suivant et repris aux chapitres 16 à 18.*

## ANNEXE

### CALCUL D'UNE TRANSFORMÉE NUMÉRIQUE DE FOURIER PAR L'ALGORITHME DE COOLEY-TUKEY

Dans le cas où  $N = 2^n$ , on pose (les  $p_j$  et  $k_j$  pouvant prendre les valeurs 0 ou 1) :

$$\begin{aligned}
 p &= P_0 + 2P_1 + \dots + 2^{n-1}P_{n-1} \rightarrow k = k_0 + 2k_1 + \dots + 2^{n-1}k_{n-1} \\
 p \cdot k &= P_0(k_0 + 2k_1 + \dots + 2^{n-1}k_{n-1}) + 2P_1(k_0 + \dots + 2^{n-2}k_{n-2}) + \dots + 2^{n-1}P_{n-1}k_0 \\
 &\quad + 2^n(P_1 + k_{n-1} + \dots + P_{n-1}k_1) \\
 H_k &= \sum_{p=0}^{N-1} Z_p \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} p \cdot k\right\} \\
 2^n = N &\Rightarrow \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} \cdot N(P_1k_{n-1} \dots)\right\} = 1
 \end{aligned}$$

il vient alors :

$$\begin{aligned}
 H_k &= \sum_{p=0}^{N-1} Z_p \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} \cdot 2^{n-1}P_{n-1}k_0\right\} \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} \cdot 2^{n-2}P_{n-2}(k_0 + 2k_1)\right\} \dots \\
 &\quad \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} P_0(k_0 + \dots + 2^{n-1}k_{n-1})\right\}
 \end{aligned}$$

par ailleurs si  $p = p_0 + 2p_1 + \dots$  on peut écrire :

$$\sum_{p=0}^{N-1} Z_p = \sum_{P_0=0}^1 \sum_{P_1=0}^1 \dots \sum_{P_{n-1}=0}^1 Z(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$$

d'où l'expression de  $H_k$  :

$$\begin{aligned}
 H(k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) &= \sum_{P_0} \sum_{P_1} \dots \sum_{P_{n-1}} [Z(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})] \\
 &\quad \left[ \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} 2^{n-1}P_{n-1}k_0\right\} \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} 2^{n-2}P_{n-2}(k_0 + 2k_1)\right\} \dots \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} P_0(k_0 + \dots + 2^{n-1}k_{n-1})\right\} \right]
 \end{aligned}$$

En partant des  $N$  valeurs de  $Z$  mises en mémoire on procède de la manière suivante :

**première itération :**

$$A_0(P_0, P_1, \dots, k_0) = \sum_{P_{n-1}} Z(P_0, \dots, P_{n-1}) \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} 2^{n-1}P_{n-1}k_0\right\}$$

**deuxième itération :**

$$A_1(P_0, P_1, \dots, k_1, k_0) = \sum_{P_{n-2}} [A_0(P_0, P_1, \dots, P_{n-2}, k_0)] \cdot \left[ \exp\left\{-\frac{j2\pi}{N} 2^{n-2}P_{n-2}(k_0 + 2k_1)\right\} \right]$$

**cas général**

$$A_j(P_0, P_1, \dots, P_{n-i-2}, k_i, \dots, k_0) = \sum_{P_{n-i-1}} [A_{i-1}(P_0, P_1, \dots, P_{n-i-1}, k_{i-1}, \dots, k_0)] \cdot \left[ \exp \left\{ -\frac{2j\pi}{N} 2^{n-i-1} P_{n-i-1} (k_0 + 2k_1 \dots + 2^i k_i) \right\} \right]$$

Méthode de calcul qui amène au bout de « n » itérations aux valeurs de  $A_{n-1}$  qui sont les :

$$H(k_n \dots k_0)$$

Initialement se trouvent en mémoire les N valeurs de  $Z_p$ , pour chaque valeur de  $P_0, P_1 \dots P_{n-2}$  on calcule par associations successives deux à deux des  $Z_p$  :

$$A_0(P_0, P_1, \dots, 0) = Z(P_0, P_1, \dots, 0) + Z(P_0, P_1, \dots, 1)$$

$$A_0(P_0, P_1, \dots, 1) = Z(P_0, P_1, \dots, 0) + Z(P_0, P_1, \dots, 1) \cdot \exp \left\{ -\frac{2j\pi}{N} 2^{n-1} \right\}$$

Les deux valeurs issues de chaque association sont rangées en mémoire en lieu et place des  $Z_p$  correspondants. Il faut N/2 associations pour aboutir aux N valeurs de  $A_0$ .

Le calcul se poursuit ensuite pas à pas pour obtenir les N valeurs des  $A_i$  à partir des N valeurs des  $A_{i-1}$  par les relations concernant le paramètre  $k_i$  :

$$A_j(P_0, P_1, P_{n-i-2}, 0, k_{i-1}, k_0) = A_{i-1}(P_0, P_1, P_{n-i-2}, 0, k_{i-1}, k_0)$$

$$+ A_{i-1}(P_0, P_1, P_{n-i-2}, 1, k_{i-1}, k_0) \exp \left\{ \frac{j2\pi}{N} 2^{n-i-1} (k_0 + \dots + 2^{i-1} k_{i-1}) \right\}$$

pour  $k_i = 0$ .

Et, pour  $k_i = 1$ :

$$A_j(P_0, P_1, P_{n-j-2}, 1, k_{i-1}, k_0) = A_{i-1}(P_0, P_1, P_{n-i-2}, 0, k_{i-1}, k_0)$$

$$+ A_{i-1}(P_0, P_1, P_{n-i-2}, 1, k_{i-1}, k_0) \exp \left\{ \frac{j2\pi}{N} 2^{n-j-1} (k_0 + \dots + 2^{i-1} k_{i-1} + 2^j) \right\}$$

la différence entre  $A_j(1)$  et  $A_j(0)$  provient du terme exponentiel :

$$\exp \left\{ \frac{j2\pi}{N} 2^{n-j-1} (2^j) \right\}$$

si on se souvient que :  $N = 2^n$

$$\exp \left\{ \frac{j2\pi}{2^n} 2^{n-1} \right\} = \exp \{j\pi\} = -1$$

nous poserons :

$$w = \exp \left\{ \frac{-j2\pi}{N} \right\}$$

et :

$$2^{n-i-1} (k_0 + \dots + 2^{i-1} k_{i-1}) = q$$

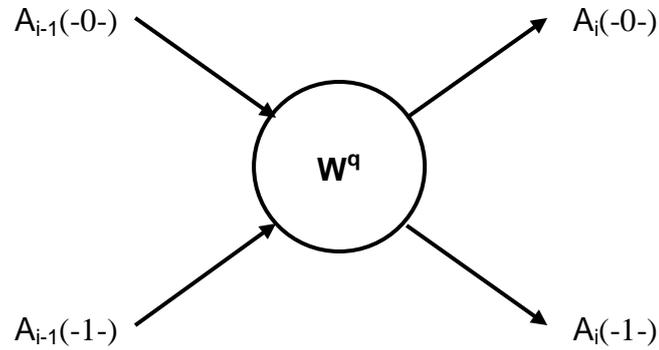
q étant un entier compris entre 0 et N -1.

Ce qui permettra d'écrire :

$$A_i(-0-) = A_{i-1}(-0-) + A_{i-1}(-1-)W^q$$

$$A_i(-1-) = A_{i-1}(-0-) - A_{i-1}(-1-)W^q$$

d'où la représentation symbolique du « **papillon FFT** »



En rangeant méthodiquement les  $A_j(0)$   $A_j(1)$  dans les cases laissées vides par les  $A_{j-1}$ , on trouve, au bout de «  $n$  » itérations, représentant  **$nN/2$  papillons**, les valeurs successives de  $H(k_n \dots k_0)$ , que l'on peut lire en **inversant les indices** pour trouver les différentes valeurs de :

$$H_k = H(k_0 \dots k_n).$$

\*\*\*\*\*