

CHAPITRE 19 - 2 : RECEPTEURS ET ANTENNES ADAPTATIFS**Approche physique : Adaptativité spatiale**

Les parties de ce chapitre concernant, la réception en bruit coloré, le filtrage auto-adaptatif et les antennes FFC adaptatives, sont inspirées des principes et des méthodes de résolution, exposés dans l'ouvrage de Monsieur François LE CHEVALIER :

« Principes de traitement des signaux radar et sonar » MASSON 1989.

5	L' AUTO-ADAPTATIVITE SPATIALE.....	27
5.1	PRELIMINAIRE.....	27
5.2	SUPPRESSION DES LOBES SECONDAIRES « SLS »	27
5.3	OPPOSITION DES LOBES SECONDAIRES – « OLS ».....	29
5.3.1	Principe du traitement, OLS mono- brouilleur.....	29
5.3.2	Influence de la présence de bruits internes sur chaque voie	29
5.3.3	Limitation liée à la présence du signal dans la voie auxiliaire.....	30
5.3.4	Réalisation type d'OLS mono-brouilleur	32
5.3.5	Principe du traitement OLS multi - brouilleurs.....	33
5.3.6	Réalisations particulières, voies auxiliaires orthogonales.....	35
5.3.7	Orthogonalisation des voies	36
5.4	APPLICATION AUX ANTENNES RESEAUX AUTO – ADAPTATIVES.....	38
5.4.1	Dualité des procédés filtre fréquentiel - filtre spatial.....	38
5.4.2	Principe de réalisation d'une antenne réseau adaptative OLS	39
5.4.3	Critères pratiques de réalisation	41
6	AUTRE DEMARCHE D'ADAPTATIVITE SPATIALE LA FORMATION DE FAISCEAUX PAR LE CALCUL.....	41
6.1	PRELIMINAIRE.....	41
6.1.1	Discretisation des équations du filtrage optimal	41
6.1.2	Vectorisation des équations du filtrage optimal.....	42
6.1.3	Application aux antennes réseaux	43
6.2	REALISATIONS PHYSIQUES.....	43
6.2.1	Présence des seuls bruits thermiques - formation de faisceau classique.....	43
6.2.2	Présence de bruits externes - Formation de faisceaux adaptative	46
6.2.3	Estimation de la puissance de calcul	49
6.2.4	Précision dans le cas des réseaux plans.....	50
6.3	PERFORMANCES ATTENDUES	51
6.3.1	Amélioration de la détection	51
6.3.2	Modification de la directivité de l'antenne.....	51
6.4	FORMATION DE FAISCEAUX SANS REFERENCE BRUIT SEUL.....	52
6.4.1	Preliminaire	52
6.4.2	Traitement « optimal » sans référence bruit seul	52
6.4.3	Minimisation sous contrainte	54
6.4.4	Calcul du filtre V_M par la méthode du gradient.....	56
6.4.5	Equivalence OLS - Minimisation sous contrainte.....	58
6.5	ESTIMATEURS GLOBAUX DES DIRECTIONS DES CIBLES ET BROUILLEURS.....	59
6.5.1	Estimateur statistique sous contrainte ou de CAPON	59
6.5.2	Estimateur MUSIC	61
6.5.3	Estimateur à « Norme Minimale »	63
6.5.4	Méthode du maximum de vraisemblance ou « maximum likelihood »	63
7	CAS DES RESEAUX NON LINEAIRES.....	64
8	ANNEXE AU CHAPITRE 19-2.....	67

5 L'AUTO-ADAPTATIVITE SPATIALE

5.1 PRELIMINAIRE

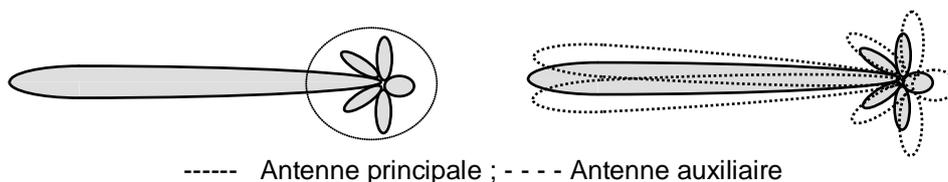
Nous avons établi au paragraphe précédent, la possibilité d'éliminer un bruit extérieur du radar par un procédé auto - adaptatif à condition de disposer d'une référence contenant ce bruit extérieur.

Dans le présent paragraphe, nous allons poursuivre cette étude dans le cas de signaux de brouillage en provenance d'autres directions de l'espace que celle du signal utile. Après un rappel sur les systèmes SLS (suppression des lobes secondaires) on sera amené à étudier les systèmes OLS (opposition des lobes secondaires) mono, puis multibrouilleurs et à généraliser ce procédé dans le cas des antennes réseaux.

5.2 SUPPRESSION DES LOBES SECONDAIRES « SLS »

Ce procédé déjà très ancien est également connu sous le nom de SLB (Side Lobe Blanking). Il a pour but d'éviter que des signaux très puissants (brouillage, échos de sol, échos de cibles très proches ou très puissants), perçus par les lobes secondaires de l'antenne, ne soient pris en compte par l'organe de traitement. Ainsi, en principe, seuls sont traités les signaux en provenance du lobe principal, dont l'extension angulaire est alors bien définie.

Pour déterminer si l'énergie reçue provient ou non du lobe principal, on dispose d'une antenne auxiliaire, peu directive, dont le diagramme recouvre au mieux les lobes secondaires de l'antenne principale.



Les signaux en provenance des deux antennes sont comparés entre eux. Si le signal en provenance de l'antenne principale est d'amplitude inférieure à celui issu de l'antenne auxiliaire, c'est qu'il a été perçu par les lobes secondaires de l'antenne principale. Il est alors bloqué et ainsi n'est pas pris en compte au niveau du traitement.

Ainsi, d'une manière assez primaire, a-t-on réalisé une adaptation automatique au milieu extérieur permettant de réguler la fausse alarme du radar par élimination de parasites provenant d'une direction autre que celle de la cible utile.

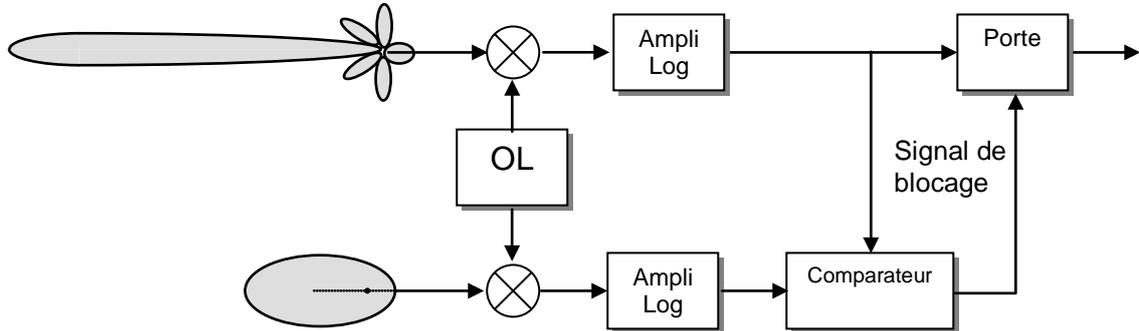
Il est évident que, pour que la comparaison puisse se faire, la chaîne de réception utilisée doit être à très grande dynamique.

Si on recherche la meilleure adaptation, l'antenne auxiliaire doit être directive, pour éviter le lobe principal et recouvrir au mieux les lobes secondaires de l'antenne principale. Elle doit alors être liée à l'antenne principale et la suivre dans son mouvement.

Pour éviter des pertes de sensibilités il est souhaitable que l'antenne auxiliaire présente un creux de diagramme dans la direction du lobe principal du radar. Cela revient à disposer d'une référence contenant très peu de signal utile. Dans le cas des antennes monopulse, la voie différence de l'antenne peut être utilisée comme voie auxiliaire. Les gains des deux voies peuvent être ajustés au niveau des récepteurs pour obtenir le recouvrement optimum.

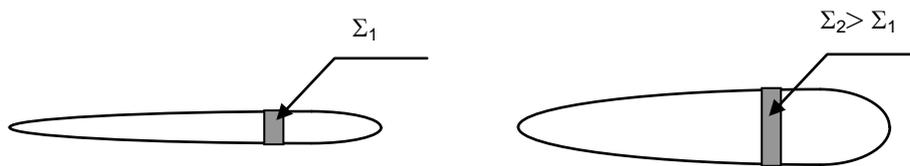
Dans le même but, il est préférable que la comparaison agisse en porte (comme sur le schéma ci - avant) et non en transparence, ceci pour éviter une perte d'amplitude des signaux faibles, préjudiciables à leur exploitation ultérieure.

D'où un schéma de principe possible, présenté ci - après :



Très efficace sur le brouillage actif, ce procédé donne de bons résultats sur les échos de sol issu des lobes secondaires proches ou des lobes de « spill over » (lobes secondaires issus de fuites de la source primaire autour du réflecteur).

Par contre, au - dessus d'échos de sol très puissants, si l'antenne auxiliaire est peu directive, on peut constater une perte de sensibilité du radar liée au résultat de la comparaison. En effet, l'antenne auxiliaire peut alors capter une très grande surface d'échos de sol, comme le montre le schéma ci - après.



Un compromis sera donc à trouver au niveau du réglage des chaînes, de manière à éliminer au mieux les brouillages et échos ponctuels issus de directions bien définies, tout en limitant la perte de sensibilité du radar au - dessus de zones denses de grande extension angulaire.

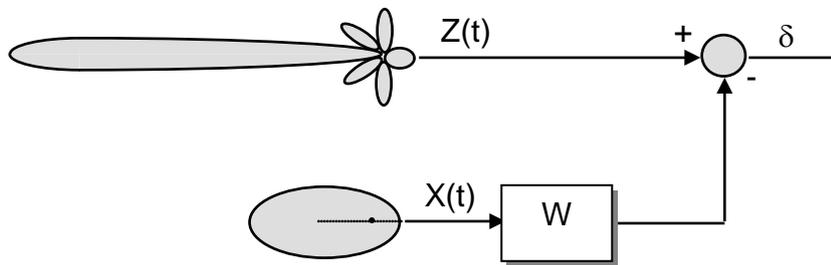
Il n'en demeure pas moins que le procédé SLS, s'il permet de réduire la fausse alarme, provoque une coupure totale des échos dans les zones brouillées, se comportant en épurateur.

Il ne prend donc pas en compte toutes les possibilités de l'auto - adaptativité qui vont être décrites ci - après.

5.3 OPPOSITION DES LOBES SECONDAIRES – « OLS »

5.3.1 Principe du traitement, OLS mono- brouilleur

Le traitement optimal pour l'exploitation d'une voie auxiliaire est celui de la suppression adaptative du parasite, décrite au paragraphe 4.1 ci- avant, qui consiste, après un filtrage convenable de la voie auxiliaire à venir retrancher celle - ci de la voie principale, selon le schéma de principe rappelé ci - après, dans le cas d'un OLS mono-brouilleur.



Par contre, il ne s'agit plus comme dans le cas précédent de distinguer les signaux au plan spectral, mais du fait qu'ils proviennent de directions différentes. Pour simplifier le raisonnement nous supposons donc les brouilleurs blancs dans la gamme de fréquence du signal utile. On a vu que dans ce cas, si le spectre du brouilleur ne subit pas de déformation différentielle dans les deux voies de réception, un simple coefficient complexe W permet l'adaptation.

En effet, le signal après opposition s'écrit :

$$\delta(t) = z(t) - W \cdot x(t)$$

pour qu'il ne contienne plus de signal brouilleur, il suffit qu'il soit indépendant de $x(t)$, soit que :

$$E[\delta(t) \cdot x^*(t)] = 0$$

$$E[\delta(t) \cdot (z(t) - W \cdot x(t)) \cdot x^*(t)] = 0$$

Ce qui conduit à poser :

$$W = \frac{E[z(t) \cdot x^*(t)]}{E[x(t) \cdot x^*(t)]} = \frac{E_{zx}}{E_{xx}}$$

Il en résulte une analogie certaine avec les résultats du paragraphe 4.1.2, à une transposition temps fréquence près, dont on pourra s'inspirer pour étudier les performances pratiques d'un tel dispositif.

5.3.2 Influence de la présence de bruits internes sur chaque voie

En présence de bruits blancs on peut écrire pour les bruits sur chaque voie :

$$\begin{aligned} z(t) &= N_{cz}(t) + N_{oz}(t) \\ N_{cz}(t) &= W \cdot N_{cx}(t) \\ x(t) &= N_{cx}(t) + N_{ox}(t) \end{aligned}$$

Il en résulte, comme en 4.1.2, un biais sur l'estimation de W qui s'écrit alors :

$$\hat{W} = W \frac{B_{cx}}{B_{cx} + B_0}$$

car N_{cx} , N_{oz} et N_{ox} sont indépendants et que l'on peut considérer les deux bruits blancs N_{oz} et N_{ox} comme de même puissance B_0 .

Ce biais est généralement négligeable mais la présence des bruits blancs sur les deux voies apporte une autre modification du résultat.

En effet, le bruit après différence s'écrit (pour $\hat{W} \sim W$) :

$$\delta(t) = z(t) - W \cdot x(t) \approx N_{oz}(t) - W \cdot N_{ox}(t)$$

et sa variance est :

$$\sigma_\delta^2 = B_0 (1 + |W|^2)$$

alors que la variance du bruit avant traitement a pour valeur :

$$\sigma_z^2 = |W|^2 B_{cx} + B_0$$

d'où le facteur d'amélioration apporté par le traitement :

$$F_A = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_\delta^2} = \frac{B_0 + |W|^2 B_{cx}}{B_0 + |W|^2 B_0}$$

Soit en remarquant que :

$$W = \frac{N_{cz}}{N_{cx}} \Rightarrow |W|^2 = \frac{B_{cz}}{B_{cx}}$$

$$F_A = \frac{B_{cz}/B_0 + 1}{B_{cz}/B_{cx} + 1}$$

Ce résultat de même forme que celui du paragraphe 4.1.3 conduit à la même conclusion.

Le traitement d'opposition des lobes secondaires sera d'autant plus performant que le rapport bruit du brouilleur sur bruit blanc dans la voie principale sera grand et que le bruit du brouilleur issu de la voie auxiliaire « couvrira bien » le bruit du brouilleur issu de la voie principale.

5.3.3 Limitation liée à la présence du signal dans la voie auxiliaire

Plaçons nous dans le cas extrême où les bruits blancs des deux voies sont négligeables, et considérons la présence de signal sur la voie auxiliaire.

On écrira alors :

$$N_{cx} = K \cdot N_{cz} \Leftrightarrow K = W^{-1}$$

$$S_x = L \cdot S_z$$

La présence de signal sur la voie de référence vient fausser l'estimation de W qui devient :

$$\hat{W} = \frac{E[z(t) \cdot x^*(t)]}{E[x(t) \cdot x^*(t)]} = \frac{E[(s_z(t) + N_{cz}(t)) \cdot (L^* s_z^*(t) + K^* N_{cz}^*(t))]}{E[(L \cdot s_z(t) + K \cdot N_{cz}(t)) \cdot (L^* s_z^*(t) + K^* N_{cz}^*(t))]}$$

Soit si S est la puissance : $S = E[s \cdot s^*]$ du signal :

$$\hat{W} = \frac{L^* S_z + K^* B_{cz}}{|L|^2 S_z + |K|^2 B_{cz}}$$

La présence du signal dans la voie de référence vient donc bien fausser le calcul de W. Il faut cependant remarquer que, si le signal n'est pas présent dans tous les échantillons pris en compte pour le calcul des moyennes, le coefficient « l » est à pondérer par le rapport du nombre d'échantillons contenant le signal au nombre total d'échantillons utilisés. D'où l'intérêt dans le cas des brouilleurs à bruit de travailler sur un grand nombre de cellules distance.

Le calcul mené en annexe conduit à définir un contraste entre les puissances du signal et du bruit, en fonction des puissances du signal S_z et du bruit N_{bz} dans la voie signal :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_\delta = \frac{S_z}{B_{cz}} \frac{|K|^2}{|L|^2}$$

Or, le rapport signal sur bruit dans la voie auxiliaire s'écrit précisément

$$\left(\frac{S}{B}\right)_x = \frac{S_z}{B_{cz}} \frac{|L|^2}{|K|^2}$$

Il en résulte donc que l'on peut écrire :

$$\boxed{\left(\frac{S}{B}\right)_\delta \leq \left(\frac{S}{B}\right)_x^{-1}}$$

Ce résultat de même forme que celui du paragraphe 4.1.4 conduit à la même conclusion :

Le traitement par OLS sera d'autant plus efficace que le rapport signal utile sur brouilleur dans la voie auxiliaire sera faible.

Pour obtenir ce résultat, plusieurs voies sont possibles :

- prélever la référence du brouilleur où il n'y a pas de signal utile, en fin de récurrence par exemple pour les radars BFR,
- calculer les moyennes sur un grand nombre de cases distance de manière à minimiser l'effet du signal utile,
- faire appel à une directivité de l'antenne auxiliaire : gain proche de zéro dans la direction de la cible utile et/ou gain élevé dans la direction du brouilleur à éliminer, ce qui présente en outre l'avantage d'augmenter le rapport brouilleur sur bruit blanc.

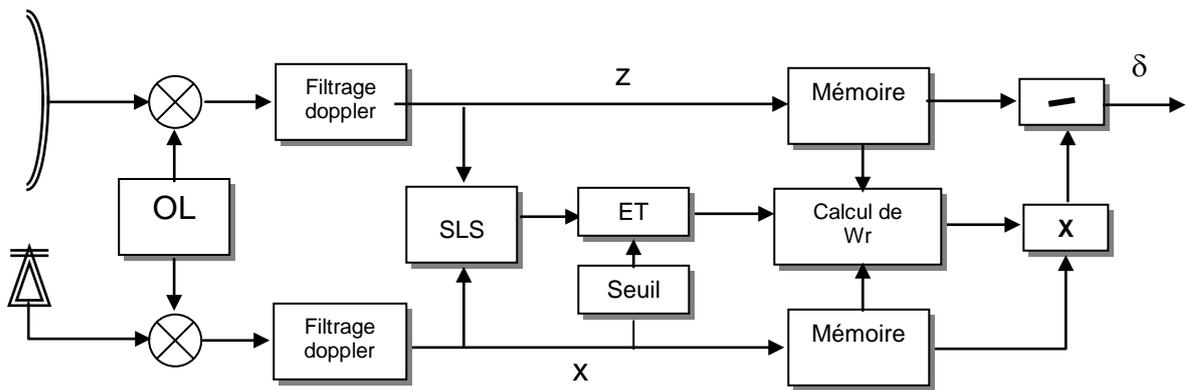
Nous aurons l'occasion d'y revenir dans l'étude des OLS multi - brouilleurs.

5.3.4 Réalisation type d'OLS mono-brouilleur

Outre les considérations qui précèdent concernant les qualités demandées aux voies auxiliaires, il faudra également pour que la mesure soit significative:

- disposer de deux antennes de polarisations identiques, de manière à ne pas fausser la référence brouilleur, paramètre difficile à maîtriser sur des lobes secondaires ;
- exclure les autres perturbateurs (clutter de sol, autres cibles utiles, clutter atmosphérique, chaffs...) ce qui peut imposer un filtrage VCM, un filtrage vitesse ou un filtrage auto-adaptatif des échos, qui devra être pris en compte pour le calcul de W et dans la mise en opposition des signaux ;
- ne pas traiter des bruits trop faibles ou pour lesquels le gain de contraste n'est pas significatif, ce qui peut être réalisé en combinant un SLS et un seuil minimum.

D'où le schéma de principe possible pour un OLS mono-brouilleur :



Le calcul de W est alors une question de compromis entre la stationnarité des phénomènes, en particulier en antennes tournantes, le nombre d'échantillons pris en compte et par cela même la puissance de calcul disponible. Des gains de l'ordre de 30 dB peuvent être obtenus en absence de clutter.

En présence de clutter le résultat est en outre lié aux performances du filtrage vitesse, un mauvais filtrage vitesse pouvant amener l'injection de parasites en provenance de la voie auxiliaire.

Par ailleurs, le coefficient W peut être calculé de manière récursive, en écrivant :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu E[\delta_k \cdot x_k^*]$$

En effet :

$$E[\delta_k \cdot x_k^*] = E[z_k \cdot x_k^*] - W_k \cdot E[x_k \cdot x_k^*]$$

et la valeur à atteindre est :

$$W_{opt} = \frac{E[z_k \cdot x_k^*]}{E[x_k \cdot x_k^*]} = \frac{E[z_k \cdot x_k^*]}{B_x}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu B_x \cdot (W_{opt} - W_k)$$

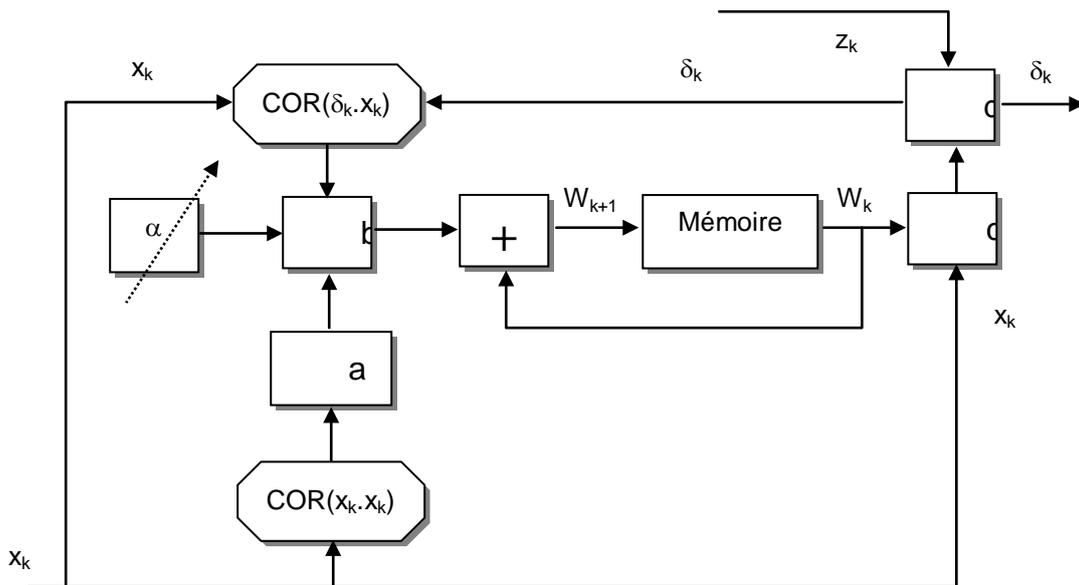
Expression qui tend bien vers W_{opt} si $2\mu B_x \ll 2$. D'où la formule de récurrence :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \hat{E}[\delta_k \cdot x_k]$$

avec : $0 \leq \mu \leq \frac{1}{B_x}$

On remarque son analogie avec celle du paragraphe 4.2.2.

La valeur précise de μ dépend du nombre de termes pris en compte dans le calcul de l'estimateur $\hat{E}[\delta_k \cdot x_k]$ qui conditionne la précision de cette estimation. Pour améliorer la rapidité de convergence on peut asservir la valeur du paramètre μ à la puissance du bruit dans la voie auxiliaire B_x , de manière à se situer toujours dans une zone de convergence rapide ($2\mu B_x \sim 1$), d'où un schéma possible de calcul du coefficient W où le sigle COR désigne une fonction d'autocorrélation ou d'intercorrélation des deux variables désignées.



Les fonctions COR peuvent être remplacées par de simples produits sur un seul échantillon, dans ce cas α doit être pris très faible et la convergence de l'algorithme devient très lente.

Dans ce cas également, la rapidité de convergence dépend de la puissance de calcul mise en jeu. On notera en outre qu'un tel schéma se prête assez bien à un calcul analogique, le retard introduit par la mémoire devant alors être égal à la durée de la récurrence de calcul de W .

5.3.5 Principe du traitement OLS multi - brouilleurs

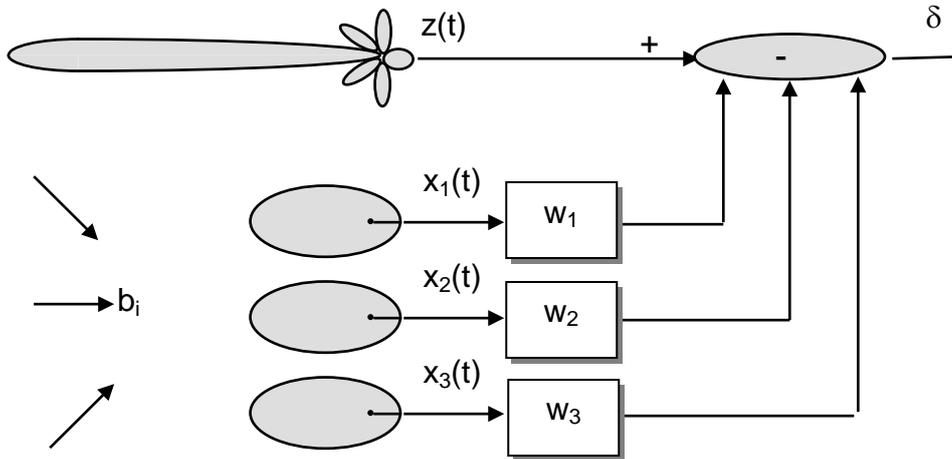
L'étude menée dans les paragraphes précédents a amené à la définition et à la description de réalisations type d'adaptativité spatiale, lorsque le brouillage provient d'une direction unique. Il reste donc à généraliser ce procédé dans le cas de brouilleurs multiples.

Nous allons étudier ce cas en supposant disposer d'autant de voies auxiliaires que de brouilleurs à traiter comme sur le schéma page suivante, en limitant le développement à trois brouilleurs.

En conservant les hypothèses du paragraphe 5.3.1, on peut écrire dans ce cas plus général, :

$$\delta(t) = z(t) - w_1 \cdot x_1(t) - w_2 \cdot x_2(t) - w_3 \cdot x_3(t)$$

x_1, x_2 et x_3 contenant dans des proportions données les bruits des trois brouilleurs.



Expression qui peut se mettre sous la forme générale :

$$\delta(t) = z(t) - \sum w_i \cdot x_i(t)$$

$$\delta(t) = z(t) - W^T \cdot X(t)$$

- \$W\$ est le vecteur de composantes \$w_1, w_2, w_3\$;
- \$X(t)\$ est le vecteur de composantes \$x_1, x_2, x_3\$.

Comme au paragraphe 5.3.1, on écrira que, pour que \$\delta(t)\$ ne contienne plus de bruit des brouilleurs captés par les voies auxiliaires, il suffit que \$\delta(t)\$ soit indépendant de \$x_1, x_2\$ et \$x_3\$.

Ce qui revient à poser comme condition :

$$E \left[\left(z(t) - W^T X(t) \right) \cdot X^*(t) \right] = 0$$

soit en appliquant cette relation successivement pour les trois composantes :

$$w_1 E \left[x_1 x_1^* \right] + w_2 E \left[x_2 x_1^* \right] + w_3 E \left[x_3 x_1^* \right] = E \left[z x_1^* \right]$$

$$w_1 E \left[x_1 x_2^* \right] + w_2 E \left[x_2 x_2^* \right] + w_3 E \left[x_3 x_2^* \right] = E \left[z x_2^* \right]$$

$$w_1 E \left[x_1 x_3^* \right] + w_2 E \left[x_2 x_3^* \right] + w_3 E \left[x_3 x_3^* \right] = E \left[z x_3^* \right]$$

Expression déjà rencontrée au paragraphe 4.2.1 et qui permet d'écrire (annexe 4) en définissant la matrice \$R_{XX}\$ de terme \$r_{ij} = E(x_i x_j^*)\$ et le vecteur \$C_{zX}\$, de terme \$c_i = E(z x_i)\$;

$$c_i = \sum_j r_{ij}^* \cdot w_j \Rightarrow C_{zX} = R_{XX}^* W$$

ou encore :

$$W_{opt} = R_{XX}^{*-1} C_{zX}$$

La matrice \$R_{XX}\$ est ici la matrice de corrélation du vecteur \$X\$ avec lui – même.

On peut vérifier qu'en absence de bruits internes et pour un nombre de brouilleurs strictement exact au nombre de voies auxiliaires, ce procédé amène théoriquement à l'élimination totale des brouilleurs.

Cependant les performances des OLS multi - brouilleurs se verront limitées comme celles des OLS mono-brouilleurs par :

- la présence des bruits internes sur chaque voie (cf § 5.3.2),
- la présence du signal dans les voies auxiliaires (cf § 5.3.3).

Sans rentrer dans le détail des calculs on peut retenir les conclusions suivantes :

Les performances des dispositifs OLS multi - brouilleurs seront d'autant meilleures que :

- le niveau des brouilleurs à éliminer sera grand devant le bruit interne des voies ;
- les bruits recueillis par les voies auxiliaires couvriront bien les bruits recueillis dans la voie principale ;
- le rapport signal utile sur brouilleur dans chaque voie auxiliaire sera faible.

5.3.6 Réalisations particulières, voies auxiliaires orthogonales

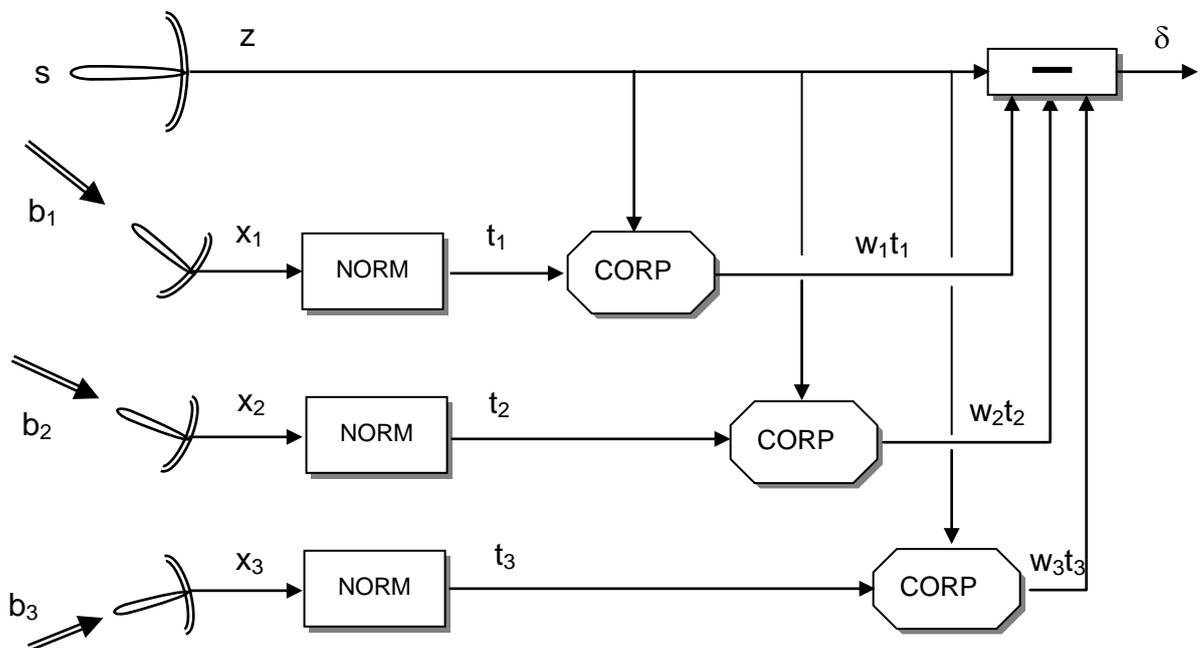
Une simplification du problème serait de créer des voies auxiliaires de telle manière que chacune d'elles ne contienne qu'un seul brouilleur. En effet, dans ce cas particulier, on pourrait écrire :

$$z(t) = \gamma \cdot a(t) + w_1 \cdot x_1(t) + w_2 \cdot x_2(t) + w_3 \cdot x_3(t)$$

et, pour chacune des composantes de W , x_1 , x_2 et x_3 étant indépendants :

$$\hat{w}_i = \frac{E[z \cdot x_i^*]}{E[x_i \cdot x_i^*]}$$

Traiter ce type d'OLS revient alors à traiter indépendamment « n » OLS mono brouilleurs. D'où un schéma de principe possible, en remarquant que l'on peut au préalable normaliser les signaux dans chaque voie de telle manière qu'ils soient de puissance unitaire après normalisation. On définit alors les fonctions suivantes :



OLS multi-brouilleurs – Voies orthogonales

Normalisation :

$$t_i = \text{NORM}(x_i) = x_i \cdot E[x_i \cdot x_i^*]^{-1/2}$$

$$E[t_i \cdot t_i^*] = 1$$

Corrélation produit :

$$\text{CORP}(z \cdot t_i) = E[z \cdot t_i^*] \cdot t_i = w_i \cdot t_i$$

On notera que CORP désigne ici une corrélation suivie d'un produit et contient donc une fonction supplémentaire par rapport à la fonction COR (corrélation) déjà utilisée.

Le calcul direct pour être précis, exige un très grand nombre d'échantillons pour le calcul des normalisations et corrélations.

Si on désire se contenter d'un nombre d'échantillons moindre, on peut alors faire appel pour chaque voie à un algorithme récursif, applicable indépendamment sur chaque voie, du type de celui exposé au paragraphe 5.3.4, basé sur la formule de récurrence, prise ici après normalisation des bruits :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \hat{E}[\delta_k \cdot t_k]$$

avec : $0 \leq \mu \leq 1$

puisque après normalisation les bruits sont de puissance unitaire.

Pour respecter les conditions d'orthogonalité (indépendance) entre les voies, les antennes auxiliaires doivent être directives et pointées chacune sur un brouilleur différent.

Ceci est le cas du procédé ABSALON, basé sur une modulation d'amplitude de la loi d'éclairement d'un aérien par interposition d'un radôme de transparence contrôlable, créant ainsi un lobe ou plusieurs lobes directifs qui peuvent, par contrôle de la modulation, être pointés sur les brouilleurs.

Un tel système répond alors de manière naturelle aux trois critères

- peu de signal dans les voies auxiliaires,
- bruit de brouilleur important sur les voies auxiliaires,
- orthogonalité des voies.

Le problème posé est alors celui de la localisation préalable des brouilleurs et du maintien du pointage des lobes auxiliaires sur les brouilleurs au cours de leur évolution.

5.3.7 Orthogonalisation des voies

Lorsque les voies ne sont pas naturellement indépendantes, différents algorithmes de calcul peuvent permettre de les « orthogonaliser ». En particulier l'algorithme dit de GRAM - SCHMIDT est présenté ci -après à titre d'exemple. Il consiste à calculer :

$$t_1 = \frac{x_1}{\sigma_1} \Rightarrow \sigma_1^2 = E[x_1 \cdot x_1^*] = E[|x_1|^2]$$

$$t_2 = \frac{x_2 - t_1 \cdot E[x_2 \cdot t_1^*]}{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_2^2 = E[|x_2 - t_1 \cdot E[x_2 \cdot t_1^*]|^2]$$

$$t_3 = \frac{x_3 - t_1 \cdot E[x_3 \cdot t_1^*] - t_2 \cdot E[x_3 \cdot t_2^*]}{\sigma_3} \Rightarrow \sigma_3^2 = E\left[x_3 - t_1 \cdot E[x_3 \cdot t_1^*] - t_2 \cdot E[x_3 \cdot t_2^*]\right]^2$$

et ainsi de suite. On peut vérifier pas à pas l'indépendance entre t_1 , t_2 et t_3 :

Indépendance entre t_1 et t_2 :

$$E[t_1^* \cdot t_2] = \frac{1}{\sigma_2} \left(E[t_1^* \cdot x_2] - E[t_1^* \cdot t_1] \cdot E[x_2 \cdot t_1^*] \right) = 0 \text{ car } E[t_1^* \cdot t_1] = 1$$

Indépendance entre t_1 et t_3 :

$$E[t_1^* \cdot t_3] = \frac{1}{\sigma_3} \left(E[t_1^* \cdot x_3] - E[t_1^* \cdot t_1] \cdot E[t_1^* \cdot x_3] - E[t_1^* \cdot t_2] \cdot E[t_2^* \cdot x_3] \right) = 0$$

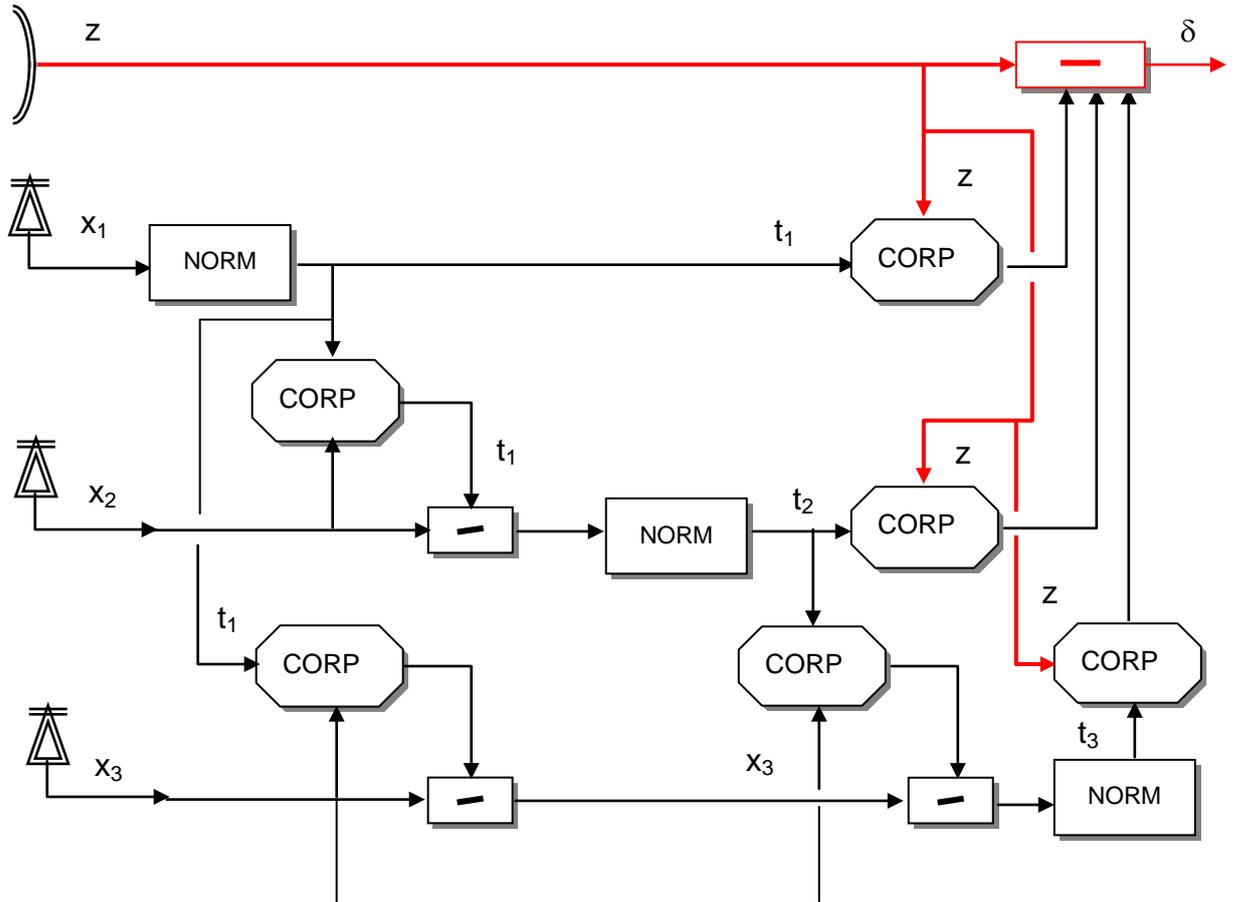
car $E[t_1^* \cdot t_1] = 1$ et $E[t_1^* \cdot t_2] = 0$

Indépendance entre t_2 et t_3 :

$$E[t_2^* \cdot t_3] = \frac{1}{\sigma_3} \left(E[t_2^* \cdot x_3] - E[t_2^* \cdot t_1] \cdot E[x_3 \cdot t_1^*] - E[t_2^* \cdot t_2] \cdot E[x_3 \cdot t_2^*] \right) = 0$$

car $E[t_2^* \cdot t_2] = 1$ et $E[t_2^* \cdot t_1] = 0$

D'où un schéma possible d'orthogonalisation des voies présenté ci après



Orthogonalisation par l'algorithme de GRAM - SCHMIDT

Ce schéma exige à l'unité près autant de calcul de corrélations (une par NORM et une par CORP) que pour une matrice de covariance de dimension N+1, mais par contre n'exige pas d'inversion de matrice comme il serait nécessaire de le faire par application de la relation établie au paragraphe 5.3.5. Il peut être combiné avec la méthode récursive exposée ci – avant, si on veut limiter la taille de ces corrélations, au détriment bien évidemment de sa rapidité de convergence.

5.4 APPLICATION AUX ANTENNES RESEAUX AUTO – ADAPTATIVES

5.4.1 Dualité des procédés filtre fréquentiel - filtre spatial

Le lecteur averti aura certainement remarqué une très forte similitude dans les expressions des filtres fréquentiels étudiés au paragraphe 4 et des filtres spatiaux étudiés au paragraphe 5 qui conduit dans le cas le plus général à l'expression :

$$W_{opt} = R_{XX}^{*,-1} \cdot C_{zX}$$

démontrée :

- au paragraphe 4.2.1 par recherche d'une numérisation de la puissance de bruit portée par la variable $\delta(t)$ à l'issue du traitement, les x_i étant des échantillons d'un même signal pris à des instants différents,
- au paragraphe 5.3.5 en écrivant que la variable $\delta(t)$ issue du traitement est indépendante de chacun des signaux issus des voies auxiliaires, les x_i étant à chaque instant les signaux issus de ces voies, donc prélevés par des capteurs différents.

Cette analogie n'est pas fortuite, elle s'explique par le fait que de la même manière que le spectre d'un signal est la transformée de Fourier de son amplitude au cours du temps, la directivité d'un aérien est la transformée de Fourier de sa loi d'éclairement.

Ainsi, un signal présentant par rapport à la référence un écart de fréquence F et échantillonné tous les intervalles τ présentera d'un échantillon au suivant un même déphasage :

$$\delta\phi_F = 2\pi \cdot \tau \cdot F$$

Pour sa part, un échantillon donné, issu d'une direction connue de l'espace θ sera vu par deux capteurs distants de d avec un déphasage :

$$\delta\phi_\theta = 2\pi \cdot \left(\frac{d}{\lambda} \right) \cdot \sin(\theta)$$

Ceci pour des signaux à « bande étroite » dans le domaine spectral : étendue du spectre du signal, ou spatial : taille de l'antenne. L'effet principal mis en jeu est alors :

- un déphasage $\delta\phi_F$ constant entre deux échos consécutifs dans le cas d'un filtre fréquentiel bâti sur des échantillons espacés temporellement de τ , qui ne dépend que de la fréquence F considérée,
- un déphasage $\delta\phi_\theta$, constant entre deux capteurs consécutifs dans le cas d'un filtre spatial bâti sur des échantillons séparés spatialement de d/λ , qui ne dépend que de la direction θ considérée.

Il y a donc dualité complète entre un filtre fréquentiel échantillonné et un filtre spatial échantillonné qui traitent des signaux de même nature, et les résultats obtenus au paragraphe

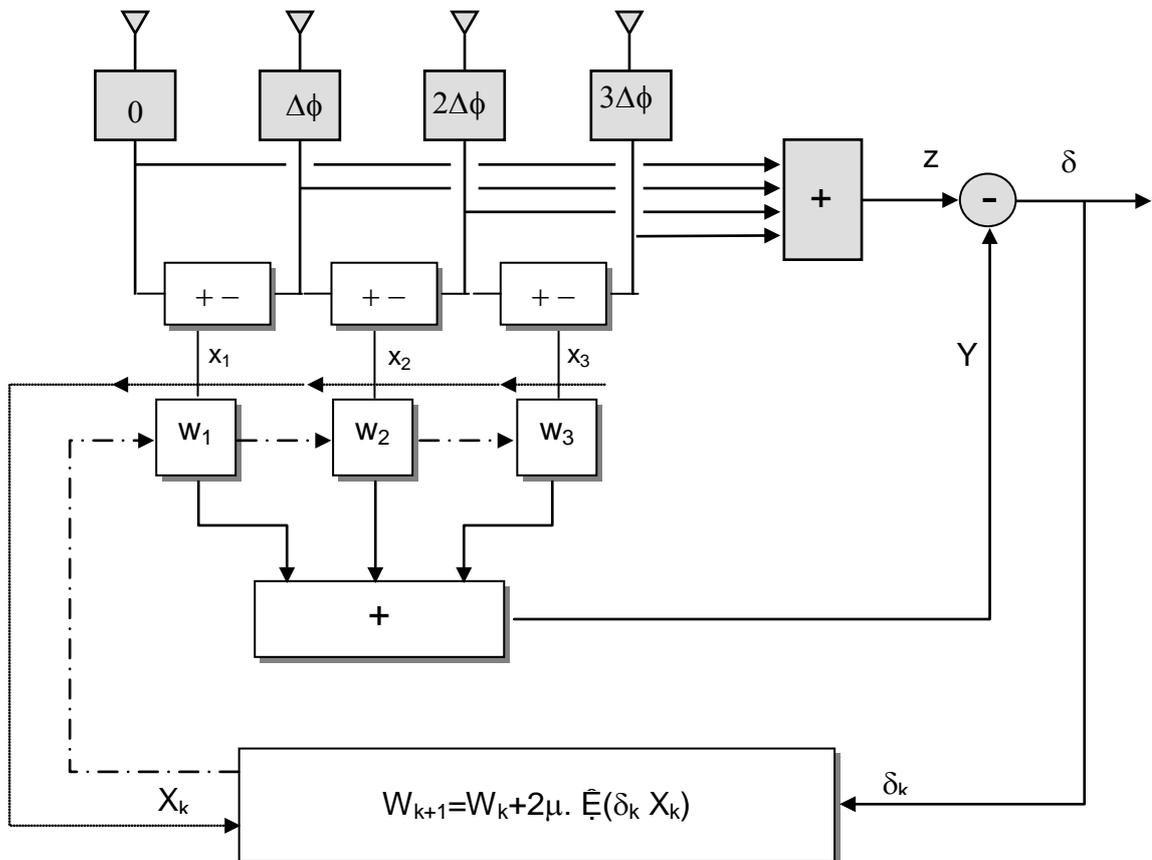
4.2 sur le filtrage fréquentiel par filtre transversal, sont directement transposables aux signaux traités par une antenne réseau, celle-ci se comportant comme un filtre transversal dans le domaine spatial.

5.4.2 Principe de réalisation d'une antenne réseau adaptative OLS

Compte tenu de ce qui précède, la réalisation d'un réseau adaptatif pourra consister à :

- créer des voies auxiliaires de « référence bruit seul », c'est à dire des voies auxiliaires dans lesquelles le signal utile n'est pas présent, ce qui peut être fait selon le principe schématisé ci – après.
- former la voie signal, ou voie somme, par addition après un déphasage convenable des signaux utiles,
- appliquer le filtre W sur l'ensemble des voies auxiliaires pour obtenir le meilleur filtrage spatial en présence de brouillage, ce qui peut être fait de manière récursive par la méthode exposée au paragraphe 4.2.2 pour un filtre fréquentiel,
- retrancher le bruit pondéré ainsi obtenu de la voie somme de l'antenne pour obtenir une voie δ :
 - ne contenant plus aucun brouilleur, si le nombre de brouilleurs est inférieur au nombre de voies auxiliaires ;
 - à puissance de bruit minimale, dans le cas général.

D'où un schéma de principe possible d'antenne réseau auto-adaptative, où le pointage du faisceau est assuré par des déphaseurs.



Antenne réseau auto - adaptative, « OLS »

Les voies « X » sont ici formées par différence entre deux sources voisines, de manière à ce que leur diagramme présente un zéro dans la direction de la cible. Cette configuration n'est pas forcément nécessaire si la référence peut être isolée temporellement (fin de récurrence des radars sans ambiguïté de distance dans le cas des brouilleurs à bruit) ; ou spectralement (zone de fréquence doppler ne contenant pas les cibles dans le cas des radars sans ambiguïté de vitesse).

Compte tenu de la structure du filtre spatial (calcul de W sur X et δ), des filtres anti-échos fixes pourraient être placés sur toutes les voies X et Z , ou encore, ce qui est équivalent dans ce cas, derrière chaque source élémentaire.

Les performances obtenues en absence de clutter de sol peuvent être excellentes (amélioration de 20 à 30 dB) si les bruits externes sont spatialement stationnaires et le temps consacré à la mesure suffisant.

Elles deviennent plus limitées si le temps de mesure est réduit (fonction veille) et/ou si la situation vue par l'antenne est évolutive (antenne tournante).

Par ailleurs, le coefficient μ doit être compris dans l'intervalle :

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{T_R(R_{XX})}$$

Il conviendra donc de le surveiller. Une des solutions peut être de normer les voies x_i comme dans le cas du paragraphe 5.3.6 (voies orthogonales), ce qui se ramène à poser :

$$T_R(R_{XX}) = n \text{ (nombre de voies)}$$

On peut également opérer une surveillance dynamique du paramètre μ en surveillant l'évolution du vecteur W de manière par exemple que :

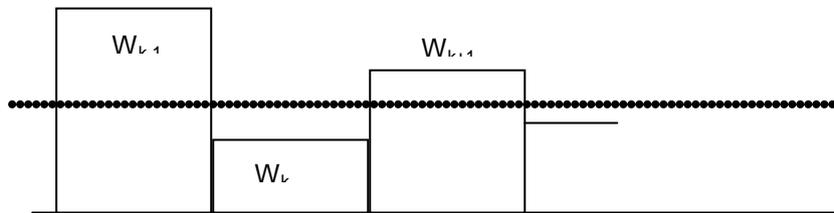
$$|W_{k+1}| - |W_k| \text{ soit de signe contraire à } |W_k| - |W_{k-1}|,$$

et que :

$$|W_{k+1}| - |W_k| / |W_k| - |W_{k-1}|$$

soit inférieur à 1 (égal à 0,5 par exemple).

Ce qui est une condition suffisante pour que le système converge :

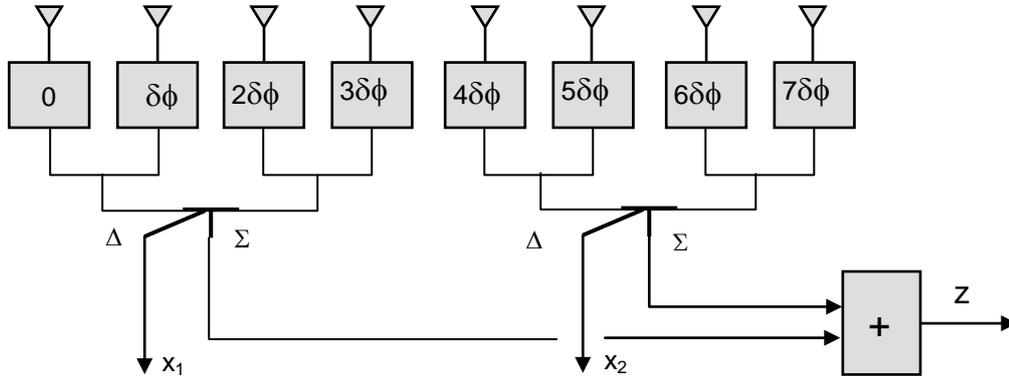


Dans tous les cas, il sera nécessaire d'observer une stationnarité suffisante des phénomènes mis en jeu : évolution des brouilleurs, rotation d'aérien... pendant le temps nécessaire à la convergence du processus.

On notera en outre que dans le cas d'un réseau régulier, le nombre maximum de brouilleurs qui seront convenablement éliminés est égal au nombre de voies auxiliaires, qui détermine le nombre de zéros réalisables par le filtre transverse (le cas des réseaux non réguliers est traité au paragraphe 7) ; la complexité du système croissant en contrepartie avec le nombre de ces voies auxiliaires.

5.4.3 Critères pratiques de réalisation

Le système ci-avant devient rapidement complexe si on multiplie le nombre de voies auxiliaires, aussi pourra-t-on se contenter d'un nombre limité de voies auxiliaires en appliquant le principe précédent sur des sous réseaux de l'alignement et non pas au niveau de chaque source de l'alignement, la formation des voies Z et X peut alors être obtenue selon le schéma suivant :



Regroupement par sous réseau (principe)

On notera que cette structure régulière n'est pas forcément optimale (voir § 7).

En présence de clutter de sol, les filtres anti-échos fixes sont à placer sur chaque voie auxiliaire x et sur la voie principale z avant l'introduction du filtrage spatial W, comme déjà évoqué au paragraphe précédent ou au paragraphe 5.3.4 pour l'OLS mono-brouilleur.

Ces conditions réunies, les performances de tels dispositifs peuvent être excellentes (facteur d'amélioration de 30 dB environ) en absence d'échos de sol. Elle deviennent liées aux performances des filtres anti-échos fixes en présence de ceux-ci.

6 AUTRE DEMARCHE D'ADAPTATIVITE SPATIALE LA FORMATION DE FAISCEAUX PAR LE CALCUL

6.1 PRELIMINAIRE

6.1.1 Discrétisation des équations du filtrage optimal

Nous avons établi au paragraphe 2.1.2 :

- la relation définissant la position du signal :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{\left| \int_{\tau} Z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2}{\int |a(t)|^2 dt} \Rightarrow \text{Maximum}$$

- la relation définissant l'amplitude complexe du signal :

$$\hat{\gamma} = \frac{\int_{\tau} Z(t) \cdot a^*(t, \hat{\theta}) \cdot dt}{\int |a(t)|^2 dt}$$

relations applicables à tous types de répliques d'énergie non unitaire.

Plaçons-nous dans le cas de signaux échantillonnés tout les $\delta t = 1/\Delta F$, donc formés de n échantillons indépendants pris sur le signal et également de n échantillons sur le bruit à l'endroit du signal.

Les relations précédentes deviennent pour des signaux échantillonnés :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{\left| \sum_1^n z_i \cdot a_i^*(\theta) \right|^2}{\sum_1^n a_i \cdot a_i^*} \Rightarrow \text{Maximum}$$

et :

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_1^n z_i \cdot a_i^*(\hat{\theta})}{\sum_1^n a_i \cdot a_i^*}$$

6.1.2 Vectorisation des équations du filtrage optimal

Ces équations peuvent être exprimées par des produits scalaires de vecteurs. En effet, considérons les vecteurs suivants :

- Z , vecteur de composantes z_i ;
- a , vecteur de composantes a_i

$$\sum_1^n a_i^*(\theta) \cdot z_i = a^H(\theta) \cdot Z$$

$$\sum_1^n a_i^* \cdot a_i = a^H \cdot a$$

expressions où a^H est le vecteur transposé conjugué du vecteur a .

Les relations deviennent donc après vectorisation :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{\left| a^H(\hat{\theta}) \cdot Z \right|^2}{a^H \cdot a} \Rightarrow \text{Maximum}$$

et

$$\hat{\gamma} = \frac{a^H(\hat{\theta}) \cdot Z}{a^H \cdot a}$$

Par ailleurs, le signal $z(t)$ contient un bruit $N(t)$ sur lequel, après échantillonnage, on peut bâtir un vecteur : N de composantes n_i .

Lorsque le bruit est blanc, la bande de bruit est après filtrage la bande du signal, N est alors, comme le vecteur signal Z , formé de n échantillons indépendants. Cela se traduit par le fait que l'on peut écrire en moyenne sur un grand nombre d'échantillons ;

$$i \neq j \Leftrightarrow E[n_i \cdot n_j^*] = 0 \Leftrightarrow E[n_i \cdot n_i^*] = \sigma_N^2 = B$$

En d'autres termes, cela signifie que la **matrice de covariance bâtie sur le vecteur N** : $K = N \cdot N^H$, de terme élémentaire $E[n_i \cdot n_j]$, **est une matrice diagonale**, de valeur :

$$K = B \cdot I$$

(« I » Matrice diagonale unitaire)

6.1.3 Application aux antennes réseaux

Cette application repose sur la dualité, mise en évidence au paragraphe 5.4.1, entre :

- un filtre fréquentiel transversal, bâti sur l'analyse d'échantillons espacés temporellement de « τ »,
- un filtre « angulaire » ou filtre spatial, bâti sur l'analyse d'échantillons espacés linéairement de « v » = d/λ .

Il en résulte que les relations établies au paragraphe précédent sur le filtrage optimal d'un récepteur s'appliquent également au traitement optimal des signaux issus d'une antenne réseau, dans ce cas :

- γ , est l'atténuation complexe du signal.
- Z , est le vecteur de composantes Z_i signaux perçus par les différentes sources du réseau,
- a , est le vecteur formé des composantes a_i , du traitement du signal par l'antenne, adapté à la direction θ de l'espace observé.

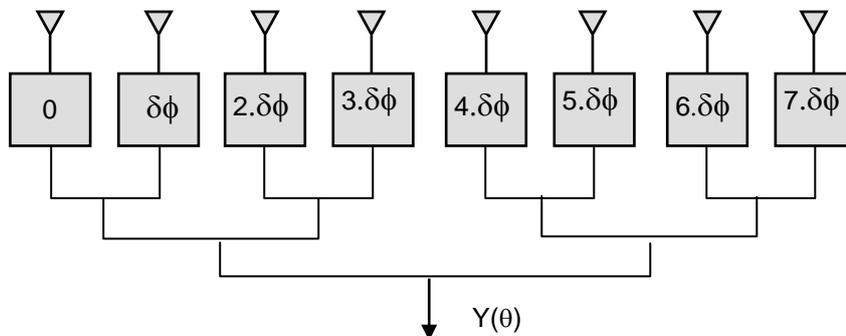
Dans la mesure où tous ces paramètres sont connus, les relations précédentes permettent de formuler le traitement effectué par une antenne réseau.

6.2 REALISATIONS PHYSIQUES

6.2.1 Présence des seuls bruits thermiques - formation de faisceau classique

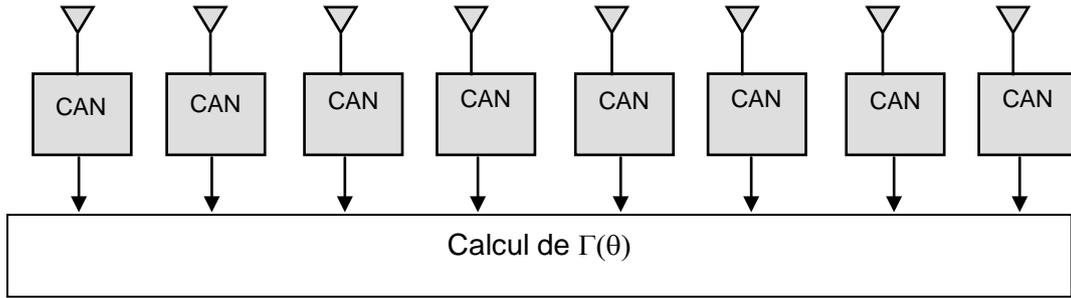
En présence des seuls bruits thermiques, les bruits de provenance extérieure n'ayant pas de direction privilégiée, on peut admettre que les bruits perçus par les différentes sources du réseau, somme des bruits internes et du bruit externe, sont indépendants entre eux et que leur somme est indépendante de la direction de visée.

Le traitement de l'antenne se ramène donc à adapter l'antenne à la direction de chaque cible visée, en redressant les phases des signaux issus des différentes cibles en fonction de leur direction θ par rapport à l'axe de visée, avant sommation des signaux, pour former $Y(\theta)$.



Dans cette opération on a introduit entre chaque source un déphasage qui dépend de la direction visée « θ » décomposé en site et gisement : $\delta\phi = -2\pi \cdot (d/\lambda) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta)$ le long d'une ligne de sources et $\delta\phi = -2\pi \cdot (d/\lambda) \cdot \sin(\alpha)$ entre deux lignes de sources, (Cf. & 6.2.4) et que nous noterons en général pour une source de rang « i » : $\delta\phi_i(\theta)$

La formation de faisceau par le calcul, consiste à recueillir le signal derrière chaque source et à reconstituer $Y(\theta)$ par le calcul.



L'opérateur de déphasage « $\delta\phi$ » est la fonction : $\exp(j \delta\phi)$. On peut donc considérer le vecteur $\mathbf{a}(\theta)$ de composantes :

$$a_i = \exp\{j \cdot \delta\phi(\theta)\}$$

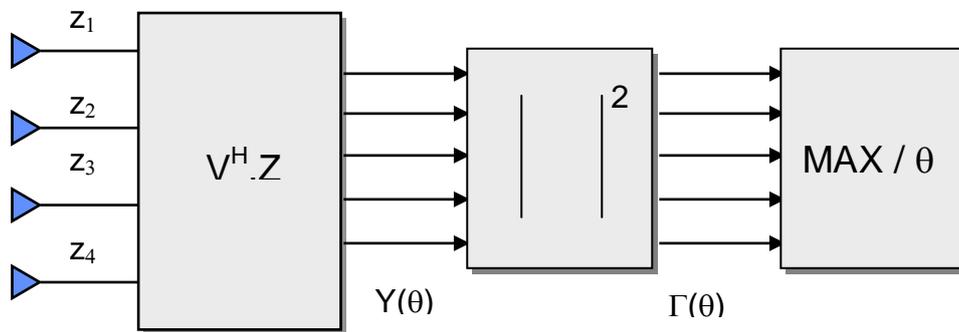
et le vecteur « normalisé » :

$$v(\theta) = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{(\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{a})^{1/2}} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{|\mathbf{a}(\theta)|}$$

et écrire le traitement de l'antenne sous la forme normalisée :

$$Y(\theta) = \frac{\sum_1^n a_i^*(\theta) \cdot z_i}{|\mathbf{a}(\theta)|} = v^H(\theta) \cdot Z$$

D'où la construction du système de réception avec création d'une voie pour chaque direction θ examinée :



La réception du signal issu de la direction θ se ramène alors à la recherche de la position θ telle que :

$$\Gamma(\theta) = \frac{\left| \sum_1^n a_i^*(\theta) \cdot z_i \right|^2}{|\mathbf{a}(\theta)|^2} = \left| v^H(\theta) \cdot Z \right|^2 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Nous avons établi que cette corrélation, se ramène à remettre en phase les signaux reçus d'une direction θ sur les différentes sources composant le réseau, avant d'en faire la somme. C'est exactement ce qui est effectué dans une antenne à balayage électronique à travers les déphaseurs et le réseau de recombinaison. Une telle antenne aura donc des performances techniques (gain, lobes secondaires...) voisines de celles d'une antenne à balayage électronique, avec l'avantage incontestable les données étant mémorisées, de la formation simultanée de faisceaux dans toutes les directions explorées. Elle sera composée :

- de modules réception associés, à chaque source (ou capteur) ;
- d'un dispositif de codage (vidéo complexe) des échantillons reçus ;
- d'un ensemble de calcul permettant de former les différents « faisceaux » dans les directions θ explorées.

Le codage devra être fait dans chaque cellule de résolution en distance, ainsi que le calcul du faisceau, d'où une puissance de calcul importante à mettre, en jeu. Par exemple pour un réseau de 100 sources et une cellule de résolution de 1 μ S (150 m), sachant qu'une corrélation sur n termes demande environ $8n$ opérations élémentaires ($4n$ produits et $4n$ additions), la puissance de calcul nécessaire pour observer 25 directions sera égale à :

$$N_{ops} = 25 \cdot 8 \cdot 100 / 10^{-6} = 2.10^{10} \text{ « opérations / seconde »}.$$

Une autre difficulté de ce type d'antenne sera la maîtrise des lobes diffus du fait de la difficulté de maîtriser l'amplitude et la phase des signaux issus de chaque voie, en raison de la dérive des amplificateurs, laquelle doit être corrigée par un contrôle actif permanent du réseau utilisant des signaux de calibration. La relation développée au chapitre 5 paragraphe 13.4 :

$$L_{dB} = -10 \cdot \log \left(\frac{n}{\sum \sigma^2} \right)$$

qui évalue le niveau moyen des lobes diffus en fonction du nombre de l'écart type des erreurs relatives, donne en ne retenant que les deux termes principaux d'erreurs :

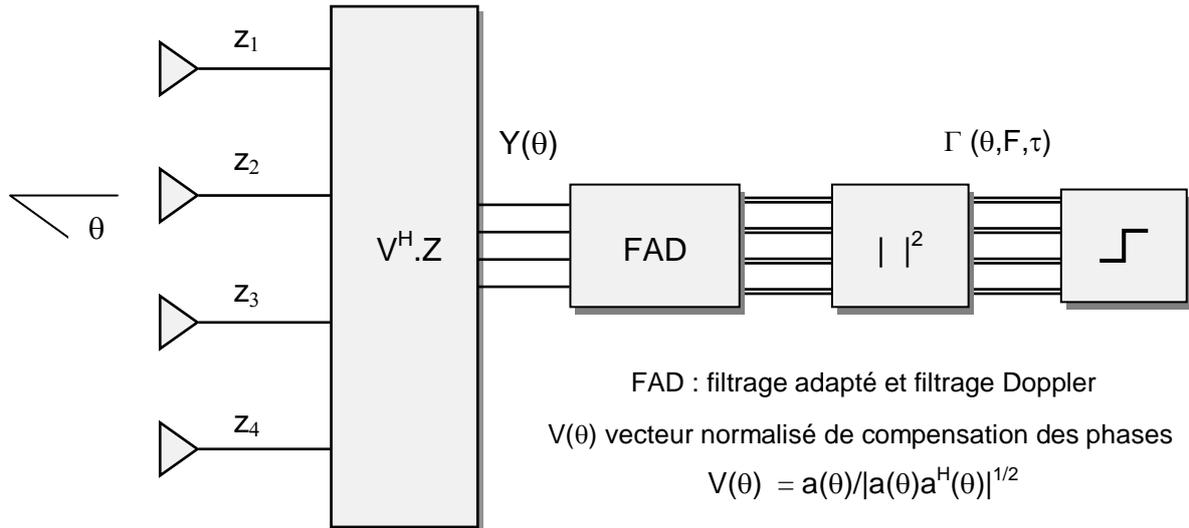
- dérive d'amplitude entre voies : $\sigma^2 = \left(\frac{\sigma_A}{A} \right)^2$;
- dispersion de phase entre voies : $\sigma^2 = \sigma_\varphi^2$, (φ en radians) ;

$$L_{dB} = -10 \cdot \log \left(\frac{n}{\left(\frac{\sigma_A}{A} \right)^2 + \sigma_\varphi^2} \right)$$

Soit, avec une dispersion d'amplitude relative d'écart type 22,5 % (dispersion de puissance en dB : $10 \log (1 + \sigma_A^2 / A) = 1,8 \text{ dB}$) et une dispersion angulaire d'écart type 13° (environ 225 mrd), un niveau de lobe secondaire de - 30 dB pour un réseau de 100 sources ce qui est loin d'être une bonne performance par rapport aux antennes à balayage électronique classiques. Il faudrait dans ce cas obtenir une dispersion de 0,6 dB ($\sigma_A / A = 7\%$) et 4° (70 mrd) pour atteindre - 40 dB ce qui est loin d'être exceptionnel.

Par ailleurs, la formation de faisceaux par le calcul, opérée sur chaque échantillon du signal, pourra être avantageusement combinée avec un filtrage adapté au signal traité tenant compte de la fréquence doppler des cibles. Celui ci pourra être classique ou lui-même adaptatif si les parasites sont colorés en fréquence.

D'où le schéma synoptique général suivant de l'antenne de réception :



Formation de faisceau par le calcul, principe

On suppose ici que l'émission est séparée ; elle doit couvrir la totalité du secteur angulaire traité en réception.

6.2.2 Présence de bruits externes - Formation de faisceaux adaptative

En présence de bruits de provenance extérieure provenant de directions privilégiées, toutes les directions de l'espace ne sont pas identiques. Il en résulte que les bruits perçus par les différentes sources du réseau, somme des bruits externes et des bruits internes, ne sont pas indépendants entre eux et leur sommation devient dépendante de la direction de visée.

Cela se traduit en particulier par le fait que la matrice de covariance bâtie sur le vecteur contenant les bruits issus des différentes sources ::

$$K = N.N^H, \text{ de terme élémentaire } E[n_i.n_j]$$

n'est plus une matrice diagonale, les divers bruits pouvant étant liés entre eux (provenance de sources données en des directions données de l'espace). On notera cependant que par construction elle est égale à sa transposée conjuguée ou « hermitique » soit : $K^H = K$.

Il n'est donc plus optimal de se contenter de rechercher les directions donnant le signal maximum pour obtenir le meilleurs rapport signal sur bruit, l'espace étant « coloré ». Une solution sera donc, comme en présence de spectre coloré, de blanchir le bruit avant de traiter le mélange signal plus bruit de manière classique. Ici, blanchir le bruit se ramène à trouver un opérateur matriciel U , qui appliqué au vecteur des bruits N rendra la matrice K diagonale. Le vecteur des échantillons du signal, traité par l'opérateur de blanchiment s'écrit alors :

$$Z_b = U \cdot Z$$

la réplique « blanchie » à associer à ce signal s'écrit également :

$$a_b = U \cdot a \Leftrightarrow a_b^H = a^H \cdot U^H$$

le produit de corrélation du signal blanchi par cette réplique :

$$a_b^H \cdot U^H \cdot U \cdot Z$$

et l'énergie portée par la réplique blanchie :

$$\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}$$

Ce qui permet de décrire la recherche de la position θ par l'expression :

$$\Gamma(\theta) = \frac{|\mathbf{a}^H(\theta) \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Z}|^2}{\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}} \Rightarrow \text{Maximum}$$

Par ailleurs si \mathbf{N}_b est le bruit blanchi égal à : $\mathbf{N}_b = \mathbf{U} \mathbf{N}$, on peut écrire :

$$I = E[\mathbf{N}_b \cdot \mathbf{N}_b^H] = E[\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H \cdot \mathbf{U}^H] = \mathbf{U} \cdot E[\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H] \cdot \mathbf{U}^H = \mathbf{U} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}^H$$

et successivement :

$$I = \mathbf{U} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}^H \Rightarrow \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}^H \Rightarrow I = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U}$$

$$\boxed{\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U}}$$

Ce qui permet de décrire la recherche de la position θ par la seconde expression :

$$\Gamma(\theta) = \frac{|\mathbf{a}^H(\theta) \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Z}|^2}{\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{a}} \Rightarrow \text{Maximum}$$

On notera l'analogie avec les expressions établies pour les filtres blanchissants et super-blanchissants. On pourra décrire l'opérateur de formation de faisceaux par l'expression :

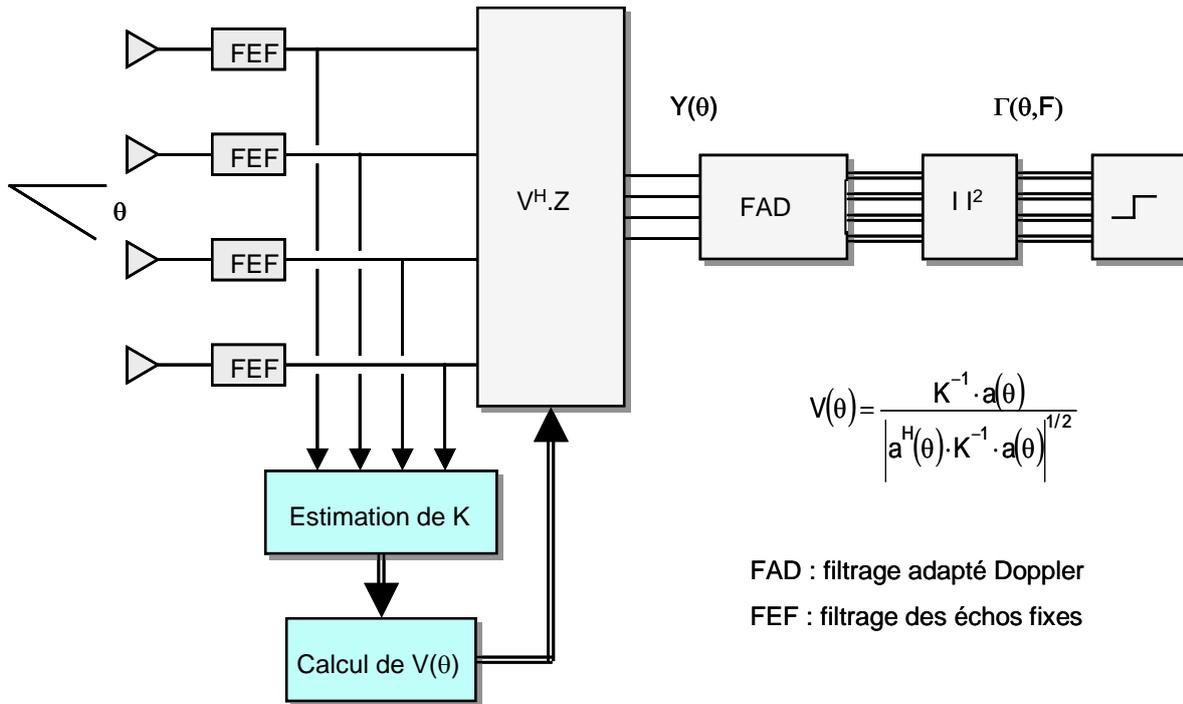
$$V(\theta) = \frac{\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\theta)}{(\mathbf{a}^H(\theta) \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\theta))^{1/2}}$$

en se souvenant que : $\mathbf{K}^H = \mathbf{K}$.

La réalisation de la formation de faisceaux en présence de bruits colorés, nécessite donc la connaissance de la matrice de covariance \mathbf{K} des bruits, donc la possibilité de prélever une référence bruit seul. Dans le cas des brouilleurs continus et des radars à longue portée (sans ambiguïté de distance) cette référence peut être prélevée en fin de récurrence où on est sûr qu'aucun signal utile n'est présent, comme déjà évoqué au paragraphe 5.4.2 dans le cas des OLS. Dans le cas des échos de clutter (sol, nuages, chaffs...) il convient au moins de filtrer les échos fixes sur chaque voie de l'alignement de manière à rendre les parasites résiduels aussi homogènes que possible. On pourra alors tenter d'évaluer la matrice de covariance \mathbf{K} sur des échantillons des parasites proches de la cible présumée (cases distance voisines) mais ne la contenant pas, par une prise d'information type « TFAC ».

Les résultats obtenus dépendront alors de l'homogénéité du milieu dans la zone de distance où \mathbf{K} est calculé, avec des irrégularités aux fronts des perturbations.

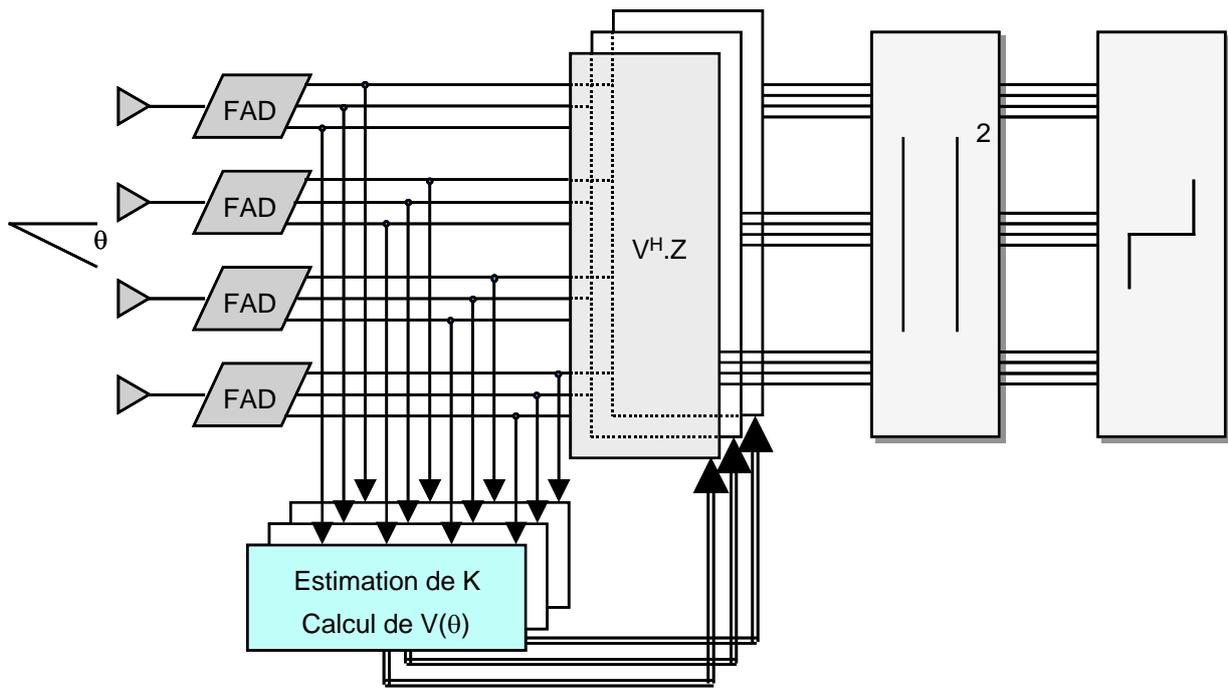
Le schéma général de l'antenne auto-adaptative en présence de bruits spatialement colorés est alors celui présenté ci-après.



Formation adaptative de faisceau, principe

Une autre méthode pourrait être de placer le filtrage doppler en tête du traitement et de créer une formation de faisceau dans chaque voie doppler. Elle est certainement plus efficace car on se rapproche encore mieux, après filtrage des échos fixes et création des voies doppler, du critère d'homogénéité des parasites.

Le schéma synoptique de cette variante est également présenté ci après.



Formation adaptative de faisceau après filtrage doppler

6.2.3 Estimation de la puissance de calcul

Au plan de la puissance de calcul, c'est la **formation de faisceaux** proprement dite qui est à priori le plus grand consommateur. En reprenant l'exemple du paragraphe 6.2.1 (100 sources, 25 faisceaux, 150 m de pouvoir séparateur) elle conduit à une puissance de calcul nécessaire à la formation de faisceaux :

$$N_{ops1} = 25 \cdot 8 \cdot 100 / 10^{-6} = 2.10^{10} \text{ ops/sec}$$

Par ailleurs, pour un **filtrage doppler** sur 32 impulsions réalisable par FFT, soit ($32 = 2^5$, $N=32$, $n = 5$) il faut : $N = 5 nN$ opérations pour réaliser N filtres doppler.

Ce calcul doit être effectué dans chaque cellule distance (T_R / τ), dans une durée égale à $N \cdot T_R$ si T_R est la période de répétition du radar, soit pour l'ensemble des cellules distances, une puissance de calcul égale à :

$$N_{ops2} = \frac{5 \cdot nN \cdot (T_R / \tau)}{N \cdot T_R} = \frac{5 \cdot n}{\tau} = 2.5 \cdot 10^7 \text{ ops/sec}$$

Il reste à évaluer la puissance de calcul pour estimer K et calculer $V(\theta)$.

Le calcul d'une matrice symétrique (ici hermitique) de taille M se ramène à celui de $M^*(M+1)/2$ termes, si chaque terme contient E échantillons, on considérera que la moyenne de E échantillons demande environ $2E$ opérations : ($E - 1$) additions et deux produits sur des nombres complexes), soit pour le calcul des termes d'une matrice de taille 100 par 100 :

$$N_{op1} = M \cdot (M + 1) \cdot E \sim 10^6 \text{ opérations}$$

L'inversion d'une matrice de taille M demande M^3 opérations complexes, soit environ $4.M^3$ opérations, dans l'exemple choisi :

$$N_{op2} = 4.M^3 = 4.10^6 \text{ opérations}$$

Le calcul de $V(\theta)$ demande en outre celui de K^{-1} soit l'équivalent de M corrélations sur M termes soit $8.M^2$ opérations et pour F faisceaux :

$$N_{op3} \sim 8.M^2 \cdot F = 2 \cdot 10^6 \text{ opérations}$$

Celui de $a^H(\theta)K^{-1}a(\theta)$ qui ne comporte que $8.M.F$ opérations est de volume négligeable.

Au total, les **calculs liés à l'adaptativité** demandent ici :

$$7 \cdot 10^6 \text{ opérations}$$

qui, s'ils devaient être réalisés dans chaque cellule distance, soit toutes les $1 \mu\text{s}$ demanderaient une puissance :

$$N_{ops3} = 7 \cdot 10^{12} \text{ ope / sec}$$

bien plus considérable que la formation de faisceaux proprement dite. Il sera donc nécessaire de les réaliser par blocs dans des zones supposées homogènes ou de les rafraîchir sur un temps long compatible avec la stationnarité des phénomènes observés, pour réduire cette valeur à une puissance égale ou inférieure à celle de la formation de faisceaux.

On retiendra donc globalement :

- dans la solution formation de faisceaux en tête :

$$N_{ops} = 2.10^{10} + 2.10^{10} + 2.5.10^7 \cdot 25 \sim 4.10^{10} \text{ ope / sec}$$

- dans la solution filtres doppler en tête:

$$N_{ops} = 2.5.10^7 \cdot 100 + 32 \cdot (2.10^{10} + 2.10^{10}) \sim 1.3.10^{12} \text{ ope / sec}$$

6.2.4 Précision dans le cas des réseaux plans

Le cas des réseaux plans se déduit de celui des réseaux linéaires en retenant (cf. chapitre 5 § 13.4) que les données à prendre en compte pour l'application des déphasages entre chaque source sont les cosinus directeurs de la direction de l'espace visé soit avec S , l'angle de site et G l'angle de gisement :

$$U = \cos S \cdot \sin G ; v = \sin S$$

On définira donc θ comme un vecteur de composantes u et v et on décrira donc le déphasage par l'expression : $\delta\varphi = 2\pi \cdot (\delta x/\lambda \cdot u + \delta y/\lambda \cdot v) = 2\pi \cdot (v_x \cdot u + v_y \cdot v)$

Le réseau peut être décrit sous forme d'une matrice comportant P lignes et Q colonnes :

$$Z = \left\| z_{p,q} \right\| \text{ avec : } 1 \leq p \leq P \text{ et } 1 \leq q \leq Q$$

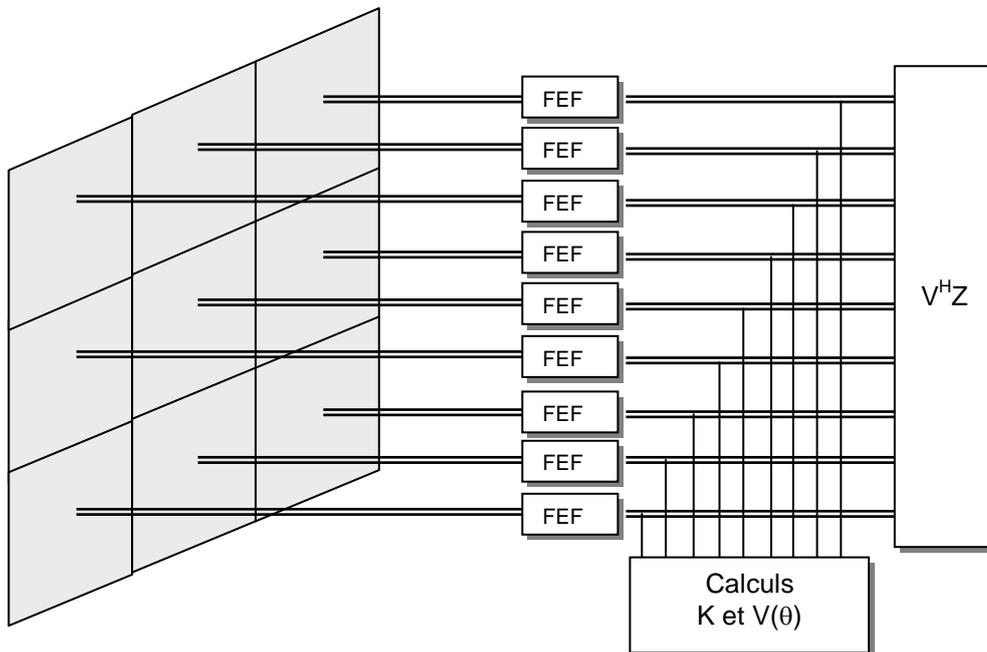
que l'on pourra ordonner en faisant correspondre par exemple si : $Q \geq P$

$$z_i = z_{p-1} Q + q$$

pour bâtir la matrice de corrélation K . On notera cependant que, compte tenu de la structure du réseau, les directions d'annulation de brouilleur ne pourront pas être réparties n'importe comment mais correspondre à $P \cdot Q$ couples $\theta = (u,v)$ soit à site donné Q directions d'annulation au maximum et au total $P \cdot Q$ directions d'annulation. Par ailleurs le nombre de sources dans un réseau plan devient rapidement élevé car (chapitre 5 paragraphe 13.3) :

$$P \cdot Q = 10000 \text{ à } 20000 / \theta_s \cdot \theta_g$$

Il est clair que de ce fait, la puissance de calcul nécessaire pour résoudre le cas des réseaux plans risque de croître considérablement. Une solution dans ce cas est de décomposer l'antenne en sous réseau, de telle manière que chaque sous réseau ait une directivité conforme au domaine angulaire total à observer, et le réseau global ainsi constitué une directivité égale au pouvoir séparateur angulaire souhaité. On retrouve ainsi une structure de même nature que celle décrite au paragraphe 5.4.3 dans le cas des réseaux linéaires, pour la formation de voies OLS multi - brouilleurs.



Principe de formation de faisceau adaptative sur un réseau plan – Combinaison de sous réseaux

Dans le cas présent, l'antenne d'émission devrait avoir une directivité égale à celle des sous réseaux et le domaine observé pourra lui-même évoluer par un pré-positionnement des phases au niveau des sources élémentaires.

Toutefois, l'espacement des sous réseaux risquant de créer des lobes de périodicité dans le domaine d'observation, il faudra avoir recours à un découpage non régulier du réseau.

6.3 PERFORMANCES ATTENDUES

6.3.1 Amélioration de la détection

On attend du dispositif une élimination du bruit des brouilleurs donc une amélioration du rapport signal sur bruit. Un calcul effectué dans le cas d'un seul brouilleur donne les résultats suivants :

Signaux en présence :

- Antenne pointée dans la direction θ , de gain en champ : $g(\delta\theta)$, (normé à 1).
- Signal utile dans la direction θ_0 , de puissance : $S \cdot |g(\theta - \theta_0)|^2$.
- Brouilleur externe dans la direction θ_1 de puissance : $\sigma^2 \cdot |g(\theta - \theta_1)|^2$.
- Bruit interne de puissance σ_0^2 .

Rapport signal sur bruit en formation classique, lorsque le radar vise la cible :

$$\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{S}{\sigma_0^2 + \sigma^2 |g(\theta_0 - \theta_1)|^2}$$

Dans les mêmes conditions le rapport signal sur bruit en formation adaptative serait :

$$\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{S}{\sigma_0^2} \left(1 - |g(\theta_0 - \theta_1)|^2\right)$$

Bien que le bruit du brouilleur soit éliminé, l'incidence du traitement sur le signal utile et le bruit interne entraînent une diminution du rapport signal sur bruit pour une visée dans la direction de la cible, d'autant plus forte que le brouilleur se rapproche de la cible.

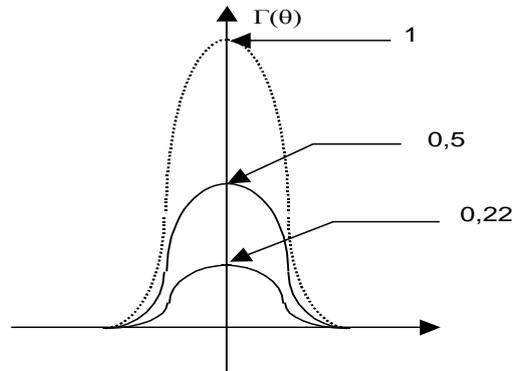
6.3.2 Modification de la directivité de l'antenne

Ce même calcul, après normalisation des signaux donne globalement une expression du signal traité par l'antenne adaptative :

$$\Gamma(\theta) = \frac{S}{\sigma_0^2} \frac{|g(\theta - \theta_0) - g(\theta - \theta_1) \cdot g(\theta_1 - \theta_0)|^2}{1 - |g(\theta - \theta_1)|^2}$$

Caractéristique de la réponse de l'antenne adaptative en présence d'un brouilleur.

La figure suivante présente l'allure de cette réponse dans deux cas, brouilleurs à -3 dB de la cible et brouilleur à -1 dB de la cible, sur une antenne classique, par rapport à sa détection en absence de brouillage.



On constate qu'il est possible d'annuler le brouillage, même pour un brouilleur très proche de la cible utile, au prix d'une perte de niveau sur le signal reçu (respectivement -3 dB et -6,6 dB dans les cas choisis) et d'un élargissement du « diagramme » de l'antenne ».

Dans la direction du brouilleur, les deux termes signal utile et bruit établis ci-avant tendent ensemble vers zéro, le radar ne perçoit plus avant normalisation ni signal ni bruit dans cette direction. Cependant le coefficient de normalisation tend aussi vers zéro. Au plan purement théorique une limite finie pourrait exister, mais elle ne répond à aucune réalité physique. En pratique, on devra fixer un minimum au terme de normalisation, ce qui créera une non-détection dans la direction du brouilleur.

On retiendra finalement que la formation adaptative de faisceau permet l'élimination de brouilleurs situés dans le lobe principal éclairant la cible, au prix d'une perte de rapport signal sur bruit et d'une déformation du diagramme d'aérien, pouvant amener une réduction de la précision de localisation de la cible.

6.4 FORMATION DE FAISCEAUX SANS REFERENCE BRUIT SEUL

6.4.1 Préliminaire

La formation de faisceaux avec référence bruit seul est la solution idéalement applicable en radar dans le cas où les deux conditions suivantes sont remplies :

- le perturbateur extérieur est un brouilleur actif ;
- le radar n'est pas ambigu en distance (*Une situation symétrique peut être décrite pour un radar sans ambiguïté de vitesse*) ;

car alors, on peut toujours dégager une zone en fin de récurrence où seuls sont présents les bruits perturbateurs. La qualité du traitement dans les zones de fouillis dépendra alors de la qualité du filtrage doppler associé.

Pour améliorer ces performances dans le fouillis, on peut imaginer calculer la matrice de covariance K séparément dans des zones denses homogènes préalablement identifiées, mais alors les cibles utiles se trouvent à l'intérieur de ces zones, et faute de calculer autant de matrices de covariance que de cellules distances observées (la cellule distance supposée contenir la cible étant à exclure du calcul de K), la matrice de corrélation contient simultanément les échos ou perturbateurs parasites et les échos utiles.

Le traitement précédemment défini n'est plus en toute rigueur utilisable. Cependant d'autres voies peuvent être exploitées.

6.4.2 Traitement « optimal » sans référence bruit seul

Dans le cas où la zone d'analyse contient des signaux utiles et un bruit coloré (ou non), il n'est plus possible de dégager des échantillons de bruits seuls pour calculer la matrice de covariance K .

On définit alors une matrice de covariance directement établie sur les signaux « Z_i » reçus par chacune des sources soit sur le vecteur Z des signaux reçus¹ :

$$R_{ZZ} = E[Z \cdot Z^H]$$

On se souvient que :

$$Z(\theta) = \gamma \cdot a(\theta) + N_Z$$

Ce qui permet d'écrire pour « J » cibles :

$$R_{ZZ} = R = E[Z \cdot Z^H] = E[N \cdot N^H] + \sum_j |\gamma_j|^2 a(\theta_j) \cdot a^H(\theta_j)$$

$$R = K + \sum_j |\gamma_j|^2 a(\theta_j) \cdot a^H(\theta_j)$$

Dans le cas d'un seul signal utile, le calcul montre que la substitution de la matrice R à la matrice K , conduit aux résultats suivants lorsque la direction observée est exactement celle de la cible en posant :

$$S = [\gamma]^2$$

$$a^H R^{-1} Z = \frac{a^H K^{-1} Z}{1 + S \cdot a^H K^{-1} a} \Leftrightarrow a^H R^{-1} a = \frac{a^H K^{-1} a}{1 + S \cdot a^H K^{-1} a}$$

D'où une déformation de la réponse de l'antenne :

$$\Gamma_R(\theta_0) = \frac{|a^H R^{-1} Z|^2}{a^H R^{-1} a} \triangleleft \text{---} \triangleright \Gamma_K(\theta_0) = \frac{|a^H K^{-1} Z|^2}{a^H K^{-1} a}$$

$$\Gamma_R(\theta_0) = \frac{\Gamma_K(\theta_0)}{1 + S \cdot a^H(\theta_0) \cdot K^{-1} a(\theta_0)}$$

Il en résulte une erreur sur l'estimation de $\Gamma(\theta)$ qui ne peut être rendue négligeable que si la contribution du signal dans le calcul de la matrice R est faible. Ce qui correspond aux cas pratiques :

- des signaux faibles devant le brouillage (ou le fouillis), qui pourraient ensuite être isolés par un filtrage doppler ;
- d'une prise en compte dans le calcul de R , d'échantillons prélevés sur des voies distance ou doppler autres que celles contenant le signal utile, possible dans le cas des radars SAD ou SAV ;
- d'une estimation de R par bloc sur des zones supposées homogènes sur un grand nombre « n » d'échantillons, de telle manière que par effet de moyenne, la puissance des signaux ponctuels se trouverait masquée par un rapport $1/n$;
- de la mise en œuvre de méthodes récursives où, après première mise en œuvre du processus, on recalcule R en excluant les cellules supposées contenir les cibles, obtenant ainsi une deuxième estimation de R plus proche de K .

¹ A ne pas confondre avec la R_{xx} des paragraphes 4 et 5, matrice de covariance des bruits « seuls » vus par les voies auxiliaires des filtres à suppression adaptative ou des OLS.

Ces méthodes ont été mises en œuvre avec plus ou moins de succès en fonction des caractéristiques des radars et du nombre de cibles traitées simultanément.

Par ailleurs, l'espérance mathématique, pour toutes les valeurs possibles de Z , d'un tel traitement peut s'écrire si :

$$\Gamma_R(\theta) = \frac{|a^H R^{-1} Z|^2}{a^H R^{-1} a} = \frac{a^H R^{-1} Z \cdot Z^H R^{-1} a}{a^H R^{-1} a}$$

$$\xrightarrow{Z} E[\Gamma_R] = \frac{a^H R^{-1} E[Z \cdot Z^H] \cdot R^{-1} a}{a^H R^{-1} a} = \frac{a^H R^{-1} a}{a^H R^{-1} a} = 1$$

car, par définition :

$$E[Z \cdot Z^H] = R$$

Le résultat devient donc indépendant de θ , ce qui est contraire au but recherché : établir les maxima par rapport à θ de la fonction $\Gamma_R(\theta)$, et c'est l'indice que ce mode opératoire risque de ne pas être efficace en toutes circonstances.

Par contre l'estimateur de l'amplitude complexe du signal « γ » établi au paragraphe 6.1.2, pris sur la matrice totale (parasite plus signal utile), s'écrirait :

$$\hat{\gamma}_R(\theta_0) = \frac{a^H R^{-1} Z}{a^H R^{-1} a} = \frac{a^H K^{-1} Z}{a^H K^{-1} a} = \hat{\gamma}_K(\theta_0)$$

Une méthode possible est donc d'explorer les différentes directions de l'espace considéré en faisant constamment l'hypothèse qu'une cible peut s'y trouver, de calculer dans chaque direction, la valeur de γ , amplitude estimée du signal (ou du bruit coloré en absence de signal) et de ne prélever que les signaux les plus forts après détection quadratique.

Cette démarche n'est pas choquante dans la mesure où, en l'absence de référence bruit seul, rien ne permet à ce niveau de différencier un signal utile d'un signal parasite ou d'un bruit coloré.

Cela revient alors à conserver les structures d'antenne décrites au paragraphes 6.2.2 et 6.2.4 en changeant le mode de calcul de l'opérateur $V(\theta)$ qui devient :

$$V_\gamma(\theta) = \frac{R^{-1} \cdot a(\theta)}{a^H(\theta) \cdot R^{-1} \cdot a(\theta)}$$

expression à retenir pour l'opérateur de traitement « optimal » sans référence bruit seul.

6.4.3 Minimisation sous contrainte

Un autre raisonnement pour rechercher un traitement adaptatif est de définir un filtre qui minimise le bruit de sortie tout en conservant un gain fixe sur une direction bien définie. On observe successivement chaque direction θ de l'espace en jouant cette hypothèse qui peut être décrite par les deux relations suivantes :

minimisation du bruit :

Si $V(\theta) = V$ est le filtre, Z le signal composite d'entrée, le signal de sortie s'écrit:

$$Y = V^H Z$$

et la minimisation de la puissance du bruit en sortie est exprimée par :

$$E[|Y|^2] \cdot \text{minimum}$$

« gain » constant dans l'axe :

On l'exprimera en normalisant l'amplitude de sortie d'une cible unitaire en provenance de la direction θ , soit:

$$V^H a(\theta) = 1$$

expression valable pour un gain normalisé tel que :

$$a^H(\theta) \cdot a(\theta) = 1$$

Ces deux conditions sont réalisées simultanément, au minimum de la fonction construite avec l'opérateur de Lagrange (λ réel).

$$L(V) = E[|Y|^2] + \lambda(1 - V^H a(\theta))$$

$$|Y|^2 = |V^H Z|^2 = V^H Z \cdot Z^H V$$

$$E[|Y|^2] = V^H E[Z \cdot Z^H] \cdot V = V^H R \cdot V$$

La fonction à minimiser est donc :

$$L(V) = V^H R \cdot V + \lambda(1 - V^H a(\theta))$$

le minimum de $L(V)$ est atteint pour la valeur de $V = X_V + jY_V$ annulant la fonction :

$$\nabla_V(L) = \frac{dL}{dX_V} + j \frac{dL}{dY_V} = 2 \cdot (R \cdot V - \lambda \cdot a(\theta))$$

Elle s'annule pour :

$$R \cdot V = \lambda \cdot a(\theta)$$

ce qui entraîne successivement :

$$V = \lambda \cdot R^{-1} a(\theta) \iff V^H = \lambda \cdot a^H(\theta) \cdot R^{-1} \iff V^H a(\theta) = \lambda \cdot a^H(\theta) \cdot R^{-1} a(\theta) = 1$$

(on rappelle que R est hermitique et que λ est un nombre réel), donc

$$\lambda = \frac{1}{a^H(\theta) \cdot R^{-1} a(\theta)}$$

avec

$$V = \lambda \cdot R^{-1} a(\theta)$$

ce qui ramène à l'expression du paragraphe précédent :

$$V_M(\theta) = \frac{R^{-1} \cdot a(\theta)}{a^H(\theta) \cdot R^{-1} \cdot a(\theta)}$$

Il y a donc équivalence entre la minimisation sous contrainte (*que certains auteurs désignent sous le nom de Filtre de Capon*) et le traitement « optimal » sans référence bruit seul. Les structures des deux récepteurs sont identiques.

6.4.4 Calcul du filtre V_M par la méthode du gradient

On cherche à minimiser la fonction $L(V)$ et on se propose de le faire en écrivant :

$$V_{k+1} = V_k - \mu \cdot \nabla_{V_k}$$

Ceci revient en effet à écrire :

$$V_{k+1} = V_k - 2\mu(R \cdot V_k - \lambda \cdot a(\theta))$$

$$V_{k+1} = V_k - 2\mu \cdot R \left(V_k - \frac{R^{-1} a(\theta)}{a^H(\theta) \cdot R^{-1} \cdot a(\theta)} \right)$$

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu \cdot R \cdot (V_{opt} - V_k)$$

expression déjà rencontrée précédemment, qui converge si $\mu T_R(R) < 1$. Ecrivons donc :

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu(\lambda \cdot a(\theta) - R \cdot V_k)$$

soit, en tenant compte de la contrainte de gain unitaire : $a^H V_{k+1} = 1$:

$$a^H V_{k+1} = a^H V_k + 2\mu\lambda a^H a - 2\mu a^H R \cdot V_k = 1$$

soit, comme $a^H a = 1$, par hypothèse :

$$1 = a^H V_k + 2\mu\lambda - 2\mu a^H R \cdot V_k$$

$$2\mu\lambda = 1 + 2\mu a^H R \cdot V_k - a^H V_k$$

et:

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu(\lambda \cdot a(\theta) - R \cdot V_k)$$

$$V_{k+1} = V_k + a + 2\mu \cdot a \cdot a^H R \cdot V_k - a \cdot a^H V_k - 2\mu R \cdot V_k$$

$$V_{k+1} = a + (I - a \cdot a^H) \cdot (V_k - 2\mu R V_k)$$

Dans cette expression on peut évidemment remplacer la matrice de covariance R par sa valeur estimée, en modulant la valeur de μ en conséquence, l'estimée la plus simple de R étant la fonction $Z \cdot Z^H$.

Sous cette dernière forme, on peut faire apparaître la sortie Y_k calculée à l'itération précédente et aboutir à la relation (Y_k scalaire) :

$$R \cdot V_k \approx Z_k \cdot Z_k^H \cdot V_k = Y_k^* Z_k \cdot \text{avec} \cdot Y_k = V_k^H Z_k \Rightarrow Y_k^* = Z_k^H V_k$$

D'où la première relation compatible d'un schéma bouclé :

$$V_{k+1} = a(\theta) + \left(I - a(\theta) \cdot a^H(\theta) \right) \cdot \left(V_k - 2\mu Y_k^* Z_k \right)$$

On peut, en outre remarquer dans le calcul précédent que l'on a le droit d'imposer la contrainte $a^H \cdot V_k = 1$. Il vient alors :

$$2\mu\lambda = 1 + 2\mu a^H R \cdot V_k - a^H V_k = 2\mu a^H R \cdot V_k$$

$$\lambda = a^H R \cdot V_k$$

et (λ scalaire) :

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu(\lambda \cdot a(\theta) - R \cdot V_k)$$

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu \left(a \cdot a^H - I \right) \cdot R \cdot V_k$$

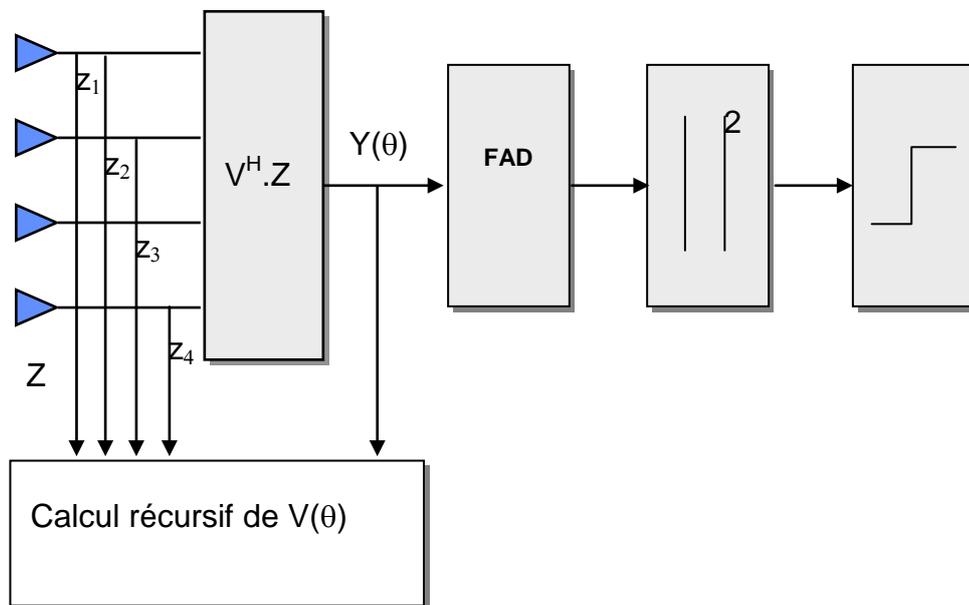
$$R \cdot V_k \approx Y_k^* \cdot Z_k$$

D'où la seconde relation compatible d'un schéma bouclé :

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu Y_k^* \cdot \left(a(\theta) \cdot a^H(\theta) - I \right) \cdot Z_k$$

Il faudra alors choisir des valeurs de μ très faibles, la matrice de covariance R ayant été remplacée par sa valeur instantanée $Z \cdot Z^H$ très fluctuante d'une mesure à l'autre. D'où une convergence assez lente. Par ailleurs, des filtres anti-échos fixes (FEF) peuvent être placés en tête du traitement pour en améliorer les résultats.

D'où le schéma de principe :



Minimisation sous contrainte - Méthode itérative

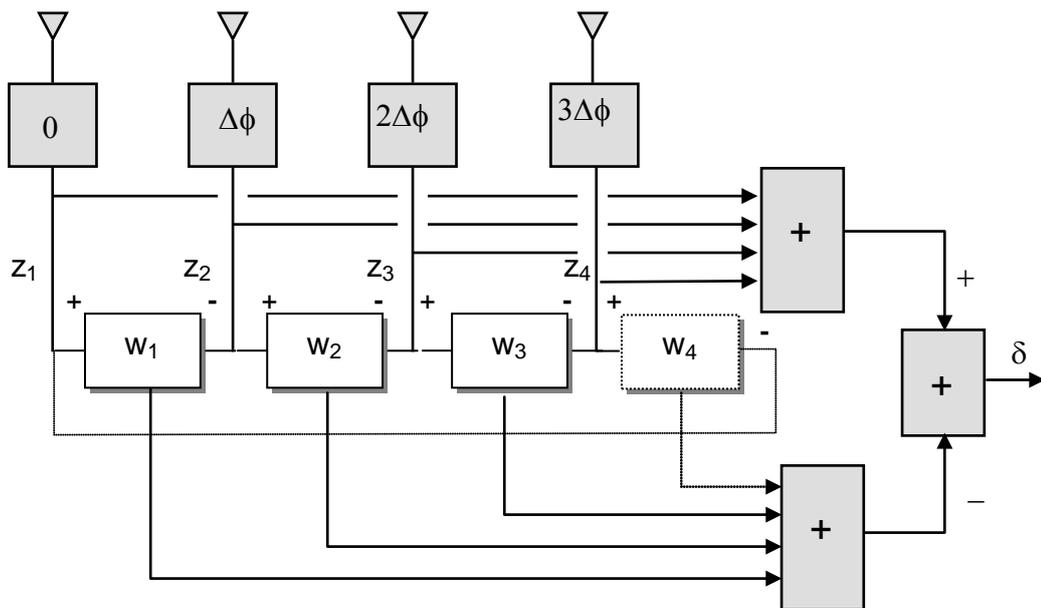
6.4.5 Equivalence OLS - Minimisation sous contrainte

Repartons du schéma de l'antenne réseau auto-adaptative à base OLS décrit au § 5.4.2.

Pour compléter ce schéma, nous avons bouclé la première et la dernière source à travers un filtre W_4 ce qui symétrise l'ensemble (nombre de coefficients de filtrage égal au nombre de sources).

A la sortie du dispositif, tout se passe comme si on avait directement filtré la variable Z par un filtre V tel que :

$$\begin{aligned} z_1 v_1 &= z_1 \cdot (1 + w_1 - w_4) \\ z_2 v_2 &= z_2 \cdot (1 + w_2 - w_1) \\ z_3 v_3 &= z_3 \cdot (1 + w_3 - w_2) \\ z_4 v_4 &= z_4 \cdot (1 + w_4 - w_3) \end{aligned}$$



Le vecteur V utilisé est tel que la somme de ses composantes a pour valeur :

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 4$$

ce qui entraînerait en considérant un vecteur d'antenne $a(\theta)$ de composantes unitaires :

$$V^T \cdot a(0) = 4$$

contrainte de même nature que dans le procédé de minimisation sous contrainte puisque dans ce système, les déphaseurs créent la correspondance $a(\theta) \Leftrightarrow a(0)$.

6.5 ESTIMATEURS GLOBAUX DES DIRECTIONS DES CIBLES ET BROUILLEURS

6.5.1 Estimateur statistique sous contrainte ou de CAPON

a Principe

La moyenne statistique pour tout z de la sortie du traitement de minimisation sous contrainte s'écrit en se reportant au paragraphe 6.4.2. :

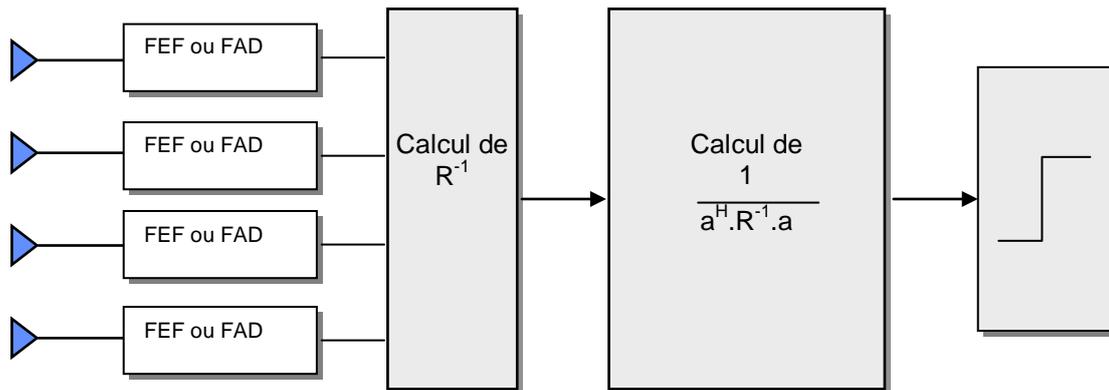
$$E\left[|\hat{\gamma}|^2\right] = E\left[\frac{\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^H \mathbf{a}}{|\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}|^2}\right] = \frac{\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} E[\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^H] \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}}{|\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}|^2} = \frac{\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}}{|\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}|^2}$$

et comme $\mathbf{a}^H(\theta) \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\theta)$ est réel positif :

$$E\left[\left(|\hat{\gamma}|^2\right)\right] = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\theta)}$$

Cet estimateur est connu sous le nom d' ESTIMATEUR DE CAPON. Il pourra être placé directement derrière le réseau réception, de préférence après élimination des échos fixes. On le fera alors opérer successivement dans toutes les directions de l'espace θ et en ne retenant que les signaux les plus forts.

D'où le schéma de principe ci-après :



Filtrage de CAPON :

b Comportement de l'estimateur de CAPON

Un calcul effectué dans le cas d'un seul brouilleur a été réalisé dans les conditions suivantes :

- antenne pointée dans la direction θ , de gain en champ : $g(\delta\theta)$, (normé à 1) ;
- signal utile dans la direction θ_0 : $g(\theta-\theta_0)$;
- brouilleur externe dans la direction θ_1 : $g(\theta-\theta_1)$.

Et en considérant que le bruit interne est négligeable, il donne le résultat suivant :

$$\frac{1}{\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}} = \frac{1 - |g(\theta_0, \theta_1)|^2}{1 - |g(\theta_0, \theta_1)|^2 - |g(\theta_0, \theta)|^2 - |g(\theta_1, \theta)|^2 + 2 \cdot \text{Réal}(g(\theta_0, \theta_1) \cdot (\theta_0, \theta) \cdot (\theta_1, \theta))}$$

Soit pour $\theta = \theta_0$:

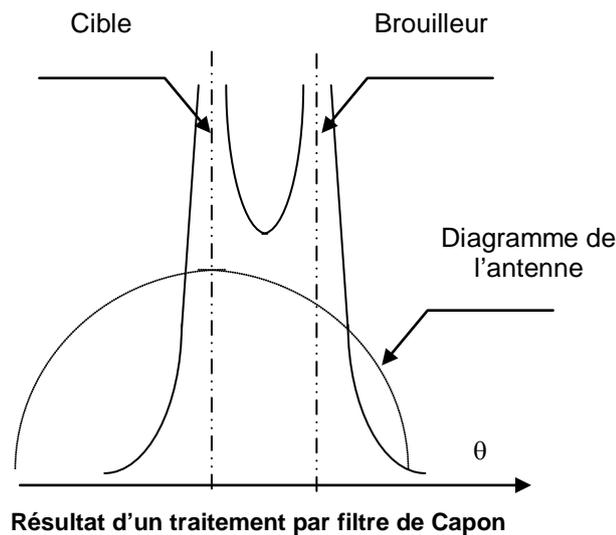
$$g(\theta_0, \theta_0) = 1$$

$$g(\theta_0, \theta_1) \cdot g(\theta_0, \theta_0) \cdot g(\theta_1, \theta_0) = |g(\theta_0, \theta_1)|^2$$

Le dénominateur de la fonction s'annule, et il en est de même pour $\theta = \theta_1$. La fonction passe donc par des valeurs infinies à l'endroit de la cible et du brouilleur.

L'allure de cette fonction est donnée dans la figure ci-après pour des gains élémentaires réels gaussiens. On y retrouve bien les deux maxima alors que le brouilleur a été placé dans le lobe à 3 dB par rapport à la cible.

Ce procédé fait preuve d'une capacité de super-résolution, que l'on fait apparaître sur la figure ci après où a été superposée la courbe de gain de l'antenne en absence de traitement.



Dans la réalité, le résultat obtenu dépendra en outre du rapport des puissances respectives portées par le signal utile, le brouilleur (ou les brouilleurs) et le bruit isotrope.

On notera en outre que le résultat obtenu dépendra du pas de l'échantillonnage des directions d'observation. Un pas de 0.1° dans l'exemple choisi, limiterait le contraste entre le creux à $0,5^\circ$ et les maxima obtenus, à une valeur de l'ordre de 7,5, un pas de $0,05^\circ$ à une valeur de l'ordre de 25, pour un faisceau d'ouverture 2° .

On voit donc que l'on serait amené à échantillonner le faisceau tous les vingtièmes ou tous les quarantièmes de sa largeur à 3dB pour bénéficier utilement de cette super-résolution. En pratique cependant, compte tenu des rapports signal sur bruit et brouilleurs sur bruit rencontrés en radar, les maxima à l'endroit de la (ou des) cible(s) et du (ou des) brouilleur(s) sont beaucoup moins marqués et les courbes obtenues sont beaucoup moins contrastées. Leur allure dépend de l'écart entre θ_0 , et θ_1 .

On notera également que le pouvoir séparateur n'est pas seulement lié à la finesse des pics de la fonction aux endroits des cibles et brouilleurs mais aussi au contraste entre les pics et le minimum qui les sépare, ces deux caractéristiques étant fortement liées aux rapports signal utile sur bruit et signal brouilleur sur bruit. Les valeurs pratiques obtenues en radar dans les conditions usuelles sont de l'ordre du quart de la largeur à 3 dB du faisceau d'antenne.

6.5.2 Estimateur MUSIC

L'estimateur MUSIC (MULtiple SIgnal Classification) dit aussi algorithme de décomposition spectrale est basé sur les propriétés de la matrice de covariance du mélange signaux utiles - brouilleurs - bruit blanc, qui peut s'écrire si θ_i est la direction d'une cible ou d'un brouilleur, P_i la puissance recueillie (de la cible ou du brouilleur) sous la forme :

$$R = E[Z \cdot Z^H] = \sigma_0^2 \cdot I + \sum_{i=1}^{i=P} P_i \cdot a(\theta_i) \cdot a^H(\theta_i)$$

généralisation de la relation établie au paragraphe 6.3.2 dans le cas d'un nombre quelconque de signaux indépendants spatialement colorés, sans chercher à distinguer a priori les cibles des brouilleurs.

Le second terme de la matrice R lié aux cibles et brouilleurs peut également se mettre sous la forme en écrivant :

$$Z = N + A \cdot \gamma$$

avec :

- A matrice bâtie sur les p directions des brouilleurs, dont les p colonnes sont les vecteurs directeurs de l'antenne $a(\theta_k)$ dans les directions considérées $1 \leq k \leq p$
- $a(\theta_k)$ vecteur de composantes $a_i(\theta_k)$,
- γ vecteur de composantes γ_i .

Donc :

$$C \cdot C^H = (A \cdot \gamma) \cdot (A \cdot \gamma)^H = A \cdot \gamma \cdot \gamma^H \cdot A^H$$

$$E[C \cdot C^H] = A \cdot E[\gamma \cdot \gamma^H] \cdot A^H$$

soit, comme les différents signaux sont indépendants :

$$E[C \cdot C^H] = A \cdot P \cdot A^H$$

Où P est une matrice diagonale de terme $E([\gamma_i]^2) = P_i$ et de taille $p < n$.

Il en résulte que la matrice de covariance R_{ZZ} , dans le cas général où sa dimension « n » est supérieure au nombre total de cibles et brouilleurs, « p » est la somme :

- de la matrice des bruits blancs $E[N \cdot N^H] = \sigma_0^2 \cdot I$: matrice régulière d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont égales à σ_0^2 ;
- de la matrice des signaux et bruits spatialement colorés

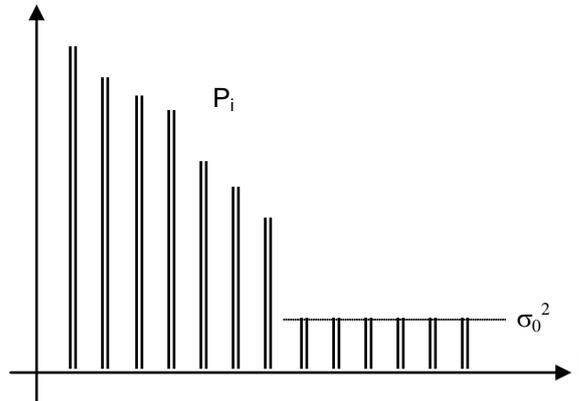
$$E[C \cdot C^H] = A \cdot P \cdot A^H = \sum_i P_i a(\theta_i) \cdot a^H(\theta_i)$$

possédant $n - p$ valeurs propres nulles et p valeurs positives égales à q_{ik} qui sont des fonctions des P_i et des θ_k .

La matrice R_{ZZ} possède donc :

- $n - p$ valeurs propres égales à σ_0^2 ;
- p valeurs propres égales à $\sigma_0^2 + q_{ik}$.

D'où l'allure du « spectre » de cette matrice, les valeurs propres étant rangées par ordre décroissant :



Spectre de la matrice de covariance R_{zz} , exemple

On peut donc théoriquement, dès que les rapports puissance signal ou brouilleurs sur puissance du bruit blanc sont suffisants, séparer ces valeurs propres et les vecteurs propres correspondants en deux sous espaces orthogonaux, l'un contenant les cibles et brouilleurs, l'autre le bruit blanc ou sous espace bruit.

Soit R_b la matrice de dimensions $n \times p$ ayant les vecteurs propres du sous espace bruit comme colonnes. Ce sous espace étant orthogonal au sous espace cibles plus brouilleurs, tous les vecteurs contenant une cible ou un brouilleur, définis par leurs vecteurs d'antennes (ou *steering vector*) $a(\theta_i)$, sont orthogonaux à tous les vecteurs colonnes de R_b donc :

$$|a^H(\theta_i) \cdot R_b| = a^H(\theta_i) \cdot R_b \cdot R_b^H \cdot a(\theta_i) = 0$$

Il suffit alors, après construction de R_b de mettre en place l'opérateur MUSIC ou PSEUDO SPECTRES:

$$M(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \cdot R_b \cdot R_b^H \cdot a(\theta)}$$

et de l'appliquer successivement à toutes les directions de l'espace θ_i pour trouver celles des cibles et brouilleurs positionnées sur les maxima de la fonction de sortie.

Ces maxima sont théoriquement infinis si les deux sous espaces : cibles plus brouilleurs et bruit blanc peuvent être séparés, (donc dans le cas des rapports puissance des signaux de cibles et brouilleurs très élevés) et si les différentes sources de bruits et signaux sont parfaitement décorrélés.

Dans la pratique l'évolution des λ_i est progressive et la limite entre ces deux espaces moins bien définie, en particulier si tous les signaux utiles ou brouilleurs ne peuvent être considérés comme des signaux forts. Les maxima sont alors moins marqués et les signaux de sortie ont la même allure que ceux résultant du filtrage de CAPON.

Les résultats obtenus par l'estimateur MUSIC sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par l'estimateur de CAPON, en particulier le pouvoir séparateur qui peut atteindre dans les conditions usuelles en radar, le sixième de la largeur à 3dB du faisceau d'antenne, mais au prix d'une complexité de calcul plus élevée.

6.5.3 Estimateur à « Norme Minimale »

Une variante de l'estimateur MUSIC conduisant à un volume de calcul plus faible consiste à ne pas prendre en compte dans l'opérateur final, l'ensemble des vecteurs de la matrice R_b mais seulement un vecteur V_b combinaison linéaire des vecteurs propres sur lesquels elle est construite. Ceci en lui imposant une norme minimale, par exemple une de ses composantes égale à 1.

Dans ce cas, l'opérateur à NORME MINIMALE s'écrit :

$$N(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \cdot V_b \cdot V_b^H \cdot a(\theta)}$$

le reste du traitement étant analogue à celui de l'opérateur MUSIC.

Les résultats obtenus sont comparables à ceux de l'estimateur MUSIC, pour un volume de calcul moindre, avec cependant une robustesse plus faible que celle des opérateurs de CAPON ou MUSIC.

6.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance ou « maximum likelihood »

Les méthodes précédentes ne peuvent donner de bons résultats que si les différents signaux de cibles et brouilleurs sont décorrélés. Condition qui apparaît clairement dans la construction des opérateurs.

Ceci n'est pas toujours le cas, en particulier sur les échos de clutter qui tous sont corrélés avec le signal émis par le radar. Un filtrage préalable des échos fixes, les plus corrélés, est donc nécessaire et a été introduit dans les différents schémas. La création de filtres vitesse découpant l'espace fréquences doppler en sous bandes étroites, améliore également la situation.

Néanmoins, la performance des opérateurs mis en place restera limitée par les phénomènes de corrélation des échos parasites dans les sous bandes où ils sont présents.

Considérons une combinaison de N senseurs (indexés q) percevant P signaux déterminants (indexés i) issus de sources différentes. Le signal issu d'un senseur de rang q s'écrira :

$$y_q(t) = \sum_{i=1}^{i=P} s_i(t) \cdot \exp\{-j\omega\tau_q(\theta_i)\} \cdot \rho_q(\theta_i) + N_q(t)$$

où $s_i(t)$ est le signal réémis par « l'émetteur » de rang i , $\rho_q(\theta_i)$ la directivité de l'antenne réceptrice dans la direction θ_q et $\tau_q(\theta_i)$ le retard de propagation, fonction de θ_i , entre l'antenne réceptrice de rang q et un point de référence. On définit alors les vecteurs :

$$\begin{aligned} \cdot \theta \cdot &= [\theta_1 \quad * \quad * \quad \theta_P]^T \\ S(t) &= [s_1 \quad * \quad * \quad s_P]^T \\ d(\theta) &= [\delta_1 \quad * \quad * \quad \delta_N]^T \\ D(\theta) &= [d_1 \quad * \quad * \quad d_P]^T \\ Y(t) &= [y_1 \quad * \quad * \quad y_N]^T \\ N(t) &= [N_1 \quad * \quad * \quad N_N]^T \end{aligned}$$

avec : $\delta_i(\theta) = \rho_i(\theta) \cdot \exp\{-j\omega \cdot \tau_i(\theta)\}$.

L'expression précédente devient alors :

$$Y(t) = D(\theta) \cdot S(t) + N(t)$$

Si on fait une hypothèse a priori sur la nature de $D(\theta)$ et $S(t)$, on peut inversement estimer le bruit $N(t)$ par la relation :

$$\hat{N}(t) = Y(t) - D(\theta) \cdot S(t)$$

ce qui conduit à l'estimation de la puissance du bruit interne :

$$\hat{B}_0 = E[\hat{N}^H \cdot \hat{N}] = E[(Y(t) - D(\theta) \cdot S(t))^H \cdot (Y(t) - D(\theta) \cdot S(t))]$$

qui se ramène si l'observation est faite sur K échantillons du signal (indexés k), à l'estimateur :

$$\hat{B}_0 = \frac{1}{K} \sum_1^K (Y(k) - D(\theta) \cdot S(k))^H \cdot (Y(k) - D(\theta) \cdot S(k))$$

En absence de bruit, $Y(k) = D(\theta) \cdot S(k)$, ce qui conduit à choisir comme estimateur de $S(k)$:

$$\hat{S}(k) = (D^H D)^{-1} D^H \cdot Y(k)$$

Et une nouvelle expression pour la puissance du bruit :

$$\hat{B}_0 = \frac{1}{K} \sum_1^K \left[\left\langle I - (D^H(\theta) \cdot D(\theta))^{-1} D^H(\theta) \right\rangle Y(k) \right]^H \left[\left\langle I - (D^H(\theta) \cdot D(\theta))^{-1} D^H(\theta) \right\rangle Y(k) \right]$$

établie dans le cas des signaux déterministes, qui ne dépend plus que de $D(\theta)$.

Le meilleur $D(\theta)$, ou du moins le plus vraisemblable, sera celui qui permet de **minimiser l'estimation de B_0** , car lorsque l'on a retiré tous les signaux spatialement colorés de $y(t)$, il ne reste plus que le seul bruit blanc $N(t)$.

La résolution de ce problème est en général difficile car il consiste à une recherche de « maximisation » non linéaire portant sur une variable multi-paramètres. On opère de manière itérative en introduisant d'abord l'hypothèse d'une seule cible d'où une première estimée de θ et en augmentant progressivement le nombre de signaux colorés pris en compte.

Cette méthode générale est connue sous le nom de **méthode ML** « Maximum Likelihood » ou maximum de vraisemblance. Elle peut prendre diverses formes en fonction des hypothèses faites sur la nature de $S(t)$.

Dans l'état actuel de l'art, ces méthodes donnent des résultats comparables à l'algorithme MUSIC sur des signaux temporellement décorrélés mais présentent une robustesse bien supérieure en présence de signaux temporellement corrélés notamment les signaux de clutter.

7 CAS DES RESEAUX NON LINEAIRES

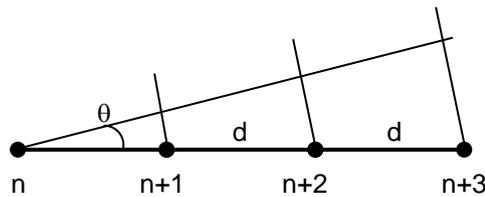
Lorsque les traitements adaptatifs par OLS, formation adaptative de faisceaux, estimateurs globaux, sont faits sur des réseaux réguliers, les matrices sur lesquelles ils s'appuient ont des propriétés particulières.

En effet, si r_i est le signal recueilli sur une voie de rang i , la matrice de covariance bâtie sur ces différentes voies s'écrira (en prenant comme notation $\langle \rangle$ pour l'espérance mathématique et en posant $r_{ij} = \langle r_i \cdot r_j^* \rangle$)

$$R = \begin{bmatrix} \langle r_1 \cdot r_1^* \rangle & \langle r_1 \cdot r_2^* \rangle & \langle r_1 \cdot r_3^* \rangle \\ \langle r_2 \cdot r_1^* \rangle & \langle r_2 \cdot r_2^* \rangle & \langle r_2 \cdot r_3^* \rangle \\ \langle r_3 \cdot r_1^* \rangle & \langle r_3 \cdot r_2^* \rangle & \langle r_3 \cdot r_3^* \rangle \end{bmatrix}$$

Or, dans le cas d'un réseau linéaire régulier, les signaux reçus par les différentes sources ne diffèrent que par des retards, fonctions de la direction observée et de la position de la source.

En particulier deux sources adjacentes verront les mêmes signaux avec un retard différentiel lié uniquement à la distance qui les sépare et non pas à leur rang.



Donc quelque soit n , la différence des retards :

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \tau_{n+2} - \tau_{n+1}$$

Ceci reste vrai pour une somme d'un nombre quelconque de signaux spatialement colorés.

Donc on peut écrire pour un signal quelconque:

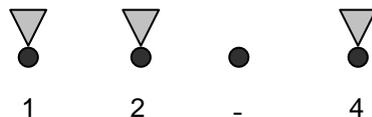
$$\langle r_1 \cdot r_2^* \rangle = \langle r_2 \cdot r_3^* \rangle = \langle r_3 \cdot r_4^* \rangle$$

ou encore :

$$\langle r_1 \cdot r_3^* \rangle = \langle r_2 \cdot r_4^* \rangle = \langle r_3 \cdot r_5^* \rangle$$

La matrice de covariance est donc une matrice de TOEPLITZ dans laquelle les termes parallèles à la diagonale principale sont égaux.

On peut utiliser cette propriété pour concevoir des réseaux lacunaires, comme dans l'exemple ci-après. Soit le réseau



sur lequel on peut bâtir la matrice de covariance :

$$\begin{array}{cccc} \langle r_1 \cdot r_1^* \rangle & \langle r_1 \cdot r_2^* \rangle & \langle e \rangle & \langle r_1 \cdot r_4^* \rangle \\ \langle r_2 \cdot r_1^* \rangle & \langle r_2 \cdot r_2^* \rangle & \langle f \rangle & \langle r_2 \cdot r_4^* \rangle \\ \langle a \rangle & \langle b \rangle & \langle c \rangle & \langle d \rangle \\ \langle r_4 \cdot r_1^* \rangle & \langle r_4 \cdot r_2^* \rangle & \langle g \rangle & \langle r_4 \cdot r_4^* \rangle \end{array}$$

D'après les propriétés précédentes, on peut compléter les termes manquants par:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \langle r_4 \cdot r_2^* \rangle \\ \langle b \rangle &= \langle r_2 \cdot r_1^* \rangle = \langle g \rangle \\ \langle c \rangle &= \langle r_4 \cdot r_4^* \rangle = \langle r_2 \cdot r_2^* \rangle = \langle r_1 \cdot r_1^* \rangle \\ \langle d \rangle &= \langle r_1 \cdot r_2^* \rangle = \langle f \rangle \\ \langle e \rangle &= \langle r_2 \cdot r_4^* \rangle \end{aligned}$$

On a donc construit une matrice de taille 4*4 à partir des signaux recueillis sur 3 capteurs. Or seule la taille de la matrice de covariance détermine le nombre maximum de brouilleurs éliminés dans le cas de l'OLS ou d'objets traités dans les autres algorithmes.

Les réseaux répondant à cette propriété sont des réseaux à redondance minimale. Ils permettent de construire des matrices de taille supérieure au nombre de capteurs réels (par exemple taille 7 avec 4 capteurs placés aux rangs 1, 2, 5 et 7) soit :

- pour les OLS de permettre une élimination d'un plus grand nombre de brouilleurs (au détriment de la robustesse du procédé) ou d'augmenter la robustesse de cette élimination à nombre de brouilleurs donné,
- pour les algorithmes de formation adaptative de faisceaux ou d'estimation globale, d'augmenter le nombre d'objets traités ou d'améliorer la robustesse du traitement, dans le cas du découpage de l'antenne en sous réseaux ou de l'emploi d'antennes lacunaires.

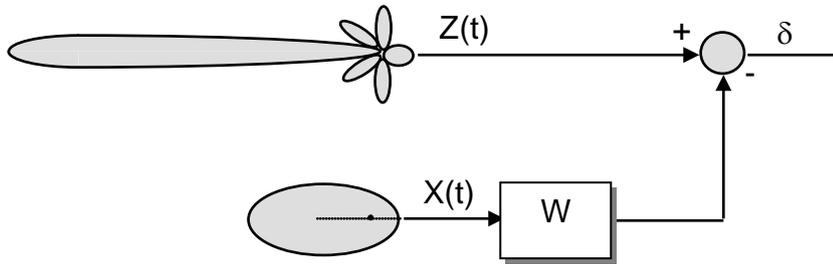
En outre, dans le second cas, si le groupement en sous réseaux n'est pas précédé d'une orientation préalable des faisceaux des sous réseaux dans la zone explorée ou si cette zone explorée est d'extension angulaire trop grande pour éviter les lobes de périodicité liés aux distances (grandes devant λ) entre les centres de phase des sous réseaux, un découpage non régulier devient nécessaire pour abaisser le niveau de ces lobes de périodicité.

Ces critères sont également applicables aux réseaux plans, leur application étant alors plus complexe.

8 ANNEXE AU CHAPITRE 19-2

Référence § 5.3.3

Calcul de l'effet d'un résidu de signal dans la voie auxiliaire



La présence de signal sur la voie de référence vient fausser l'estimation de W qui devient :

$$\hat{W} = \frac{L^* S_z + K^* B_{cz}}{|L|^2 S_z + |K|^2 B_{cz}}$$

Après soustraction de la voie auxiliaire on se trouve en présence :

- d'un signal d'expression :

$$s_{\delta}(t) = s_z(t) \cdot (1 - L \cdot \hat{W})$$

dont la puissance s'écrit :

$$S_{\delta} = S_z |1 - L \cdot \hat{W}|^2$$

- d'un bruit d'expression :

$$N_{\delta}(t) = N_{cz}(t) \cdot (1 - K \cdot \hat{W})$$

dont la puissance s'écrit :

$$B_{\delta} = B_{cz} |1 - K \cdot \hat{W}|^2$$

Le rapport signal sur bruit à la sortie du dispositif s'écrira donc :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{\delta} = \frac{S_z |L|^2 S_z + |K|^2 B_{cz} - L \cdot K^* B_{cz}|^2}{B_{cz} |L|^2 S_z + |K|^2 B_{cz} - K \cdot L^* S_z - |K|^2 B_{cz}|^2} = \frac{S_z |K^*(K-L)|^2}{B_{cz} |L^*(L-K)|^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{S}{B}\right)_{\delta} = \frac{S_z |K|^2}{B_{cz} |L|^2}}$$